第 1 章の問題の略解

問 1

(1) この問題については, 標準的な解答例と解説をしておく.

標準解答例. 拡大係数行列 $\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{array}\right]$ を行の基本変形で階段行列に変形すると,

$$\tilde{A} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

従って $x = 3, y = -4$

解説）解答としては, 上記で十分であるが, 念のために, 各基本変形のステップの変形の手順を解説しておくことにしよう.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \quad (2\text{ 行目} + (-2)\times 1\text{ 行目})$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (2\text{ 行目} \times (-1)) \\ \text{および} \\ (1\text{ 行目 と } 2\text{ 行目の交換}) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \end{array}\right] \quad (2\text{ 行目} + (-3)\times 1\text{ 行目})$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \quad (2\text{ 行目} \times (1/2)\ )$$

(2) $x = \dfrac{9}{2},\ y = 1,\ z = -\dfrac{5}{2}$

(3) 拡大係数行列を行の基本変形で階段行列に変形すると $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ となるので, 解は, $x = 3 + t + 2s,\ y = 1 - 2t - 3s, z = t,\ w = s$（$t, s$ は任意の実数）となる.

問 2 (1) ランク 3. (2) ランク 3. (3) ランク 2

問 3 (1) $x = 3,\ y = 2,\ z = 1.$ (2) 解なし

第 1 章 演習問題解答

[**1**] 3 題とも拡大係数行列を行の基本変形で階段行列に変形していくはき出し法で解く.

(1) は，係数行列を次のように変形して，

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 2 & 3\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

最後の階段行列は，第 1 列が変数 x の係数, 第 2 列が変数 y の係数なので，$x = 3$, $y = -\sqrt{2}$ ということを表している.

(2) 同様にして， $x = \dfrac{7}{2}, y = \dfrac{3}{4}, z = -\dfrac{5}{4}$ となる.

(3) は，下記のように階段行列にして，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 14 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最後の階段行列から，$z = t, w = s$ という任意の実数値を取る 2 パラメータを用いて，$x = -2 + t + 2s$, $y = 6 - 2t - 3s$, $z = t$, $w = s$ と表せることが解る.

[**2**]　(1) $y = t, v = s$ という 2 パラメータを用いて，$x = 3 - 2t - 4s, y = t$, $z = 2 + s$, $u = 1 + 2s, v = s$ と表せる.

(2)　係数行列のランクは, 3, 拡大係数行列のランクは, 4 なので, 定理 1.2 より (2) には，解は存在しない.

[**3**] (1) ランクは，$x \neq 0, y \neq 0$ のとき 3，$x \neq 0, y = 0$ または $x = 0, y \neq 0$ のとき 2，$x = y = 0$ のときは，1 となる.　(2) ランクは 2.

[**4**]　ランクは，(1) のとき 1, (2) のとき 3, (3) のとき 4, (4) のとき 4 となる.

第 2 章の問題の略解

問 1　(1) $A + B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & 16 \end{bmatrix}$　(2) $2A + 3B = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 8 \\ 18 & -4 & 43 \end{bmatrix}$

(3)　$2A + 3B = \begin{bmatrix} 18 & -5 & -26 \\ -11 & -6 & -40 \end{bmatrix}$

問 2　(1) $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$　(2)　$3A - 2B = \begin{bmatrix} 25 & 11 & 17 & -5 \\ 3 & 4 & 7 & 12 \\ -11 & -12 & -13 & -14 \end{bmatrix}$

(3) $6A-4B=\begin{bmatrix} 50 & 22 & 34 & -10 \\ 6 & 8 & 14 & 24 \\ -22 & -24 & -26 & -28 \end{bmatrix}$

問 3

A) (1) は $A+B$ の 任意の ij 成分 $= a_{ij}+b_{ij} = b_{ij}+a_{ij} = B+A$ の ij 成分

A) (3) は (1) より $A+O_2 = A$ を言えばよい. $A+O_2$ の任意の ij 成分 $= a_{ij}+0 = a_{ij} = A$ の ij 成分

A) (4) は $A-AB$ の 任意の ij 成分 $= a_{ij}-a_{ij} = 0$. 従って $A-A=O_2$

A) (5) $(AB)C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{11}+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{12}+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{11}+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{12}+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{22} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11}+a_{12}b_{21}c_{11}+a_{11}b_{12}c_{21}+a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12}+a_{12}b_{21}c_{12}+a_{11}b_{12}c_{22}+a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11}+a_{22}b_{21}c_{11}+a_{21}b_{12}c_{21}+a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12}+a_{22}b_{21}c_{12}+a_{21}b_{12}c_{22}+a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{12}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22})+a_{12}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{22}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22})+a_{22}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22} \end{bmatrix} = A(BC)$

A) (6) は実際に計算をすればよい

A) (7) $A(B+C)$ の任意の ij 成分 $= a_{i1}(b_{1j}+c_{1j})+a_{i2}(b_{2j}+c_{2j})$

$= a_{i1}b_{1j}+a_{i1}c_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i2}c_{2j}$

$= (a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j})+(a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}) = AB$ の ij 成分 $+AC$ の ij 成分

A) (8) は (7) と同様

問 4 計算すれば明らか

問 5

(1) $AB=\begin{bmatrix} -11 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $BA=\begin{bmatrix} -4 & 10 & -6 \\ -2 & -1 & 3 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix}$ (2) $AB-BA=\begin{bmatrix} -7 & -6 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & -10 & 7 \end{bmatrix}$

(3) $ABC-BAC=\begin{bmatrix} -2 & -13 & -16 \\ 2 & 4 & 4 \\ 6 & -11 & -8 \end{bmatrix}$

問 6 $AB = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $CA = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ $BC = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $CB = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

問 7 まず全ての場合で, 左辺と右辺の行列の型は一致しているので, 両辺の全ての ij 成分が一致していることを確かめればよい.

A) (1) は $A+B$ の ij 成分 $= a_{ij}+b_{ij} = b_{ij}+a_{ij} = B+A$ の ij 成分

A) (2) は $(A+B)+C$ の ij 成分 $= (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) = A+(B+C)$ の ij 成分

A) (3) は $A+O_{m,n}$ の ij 成分 $= a_{ij}+0 = a_{ij} = A$ の ij 成分

A) (4) は $A-A$ の ij 成分 $= a_{ij}-a_{ij} = 0$. 従って $A-A = O_{m,n}$

A) (5) は, 積が定義されることから, 行列 A, B, C の行と列はそれぞれ $(p.\ell)$, (ℓ, m) , (m, n) という形になり, この場合, 両辺の積の型は同じ (p, n) 行列になる. あとは両辺 $(AB)C$,$A(BC)$ の hk 成分が $\sum_{1 \leqq i \leqq \ell,\ 1 \leqq j \leqq m} a_{hi}b_{ij}c_{jk}$ に一致することを確かめればよい.

A) (6) まず **クロネッカーのデルタ記号** δ_{ij} を次のように定める. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$
このとき単位行列 $E_m = [\delta_{ij}]$ と表せることを使って, 実際に計算をすればよい

A) (7),(8). 問 3 の (7),(8) と同様にして示すことができる.

問 8 行列の積の結合法則を使って $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(E_n)A^{-1} = (AE_n)A^{-1} = AA^{-1} = E_n$.
$(B^{-1}A^{-1})AB$ も同様に計算できる.

問 9 $A = [a_{ij}], {}^tA = [a'_{ji}]$ とすると A が (m, n) 行列なら ${}^tA$ は (n, m) 行列で $a'_{ji} = a_{ij}$ であったことを使えば容易に示せる.

問 10

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -12 & 1 & 8 \\ -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

問 11

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

問 12 左上のブロックについては $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$ で確かめられる. 他のブロックも同様に確かめることができる

第 2 章 演習問題解答

[1] $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ となる. 計算手順としては $(B+C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を求めてから積を計算するか, $A(B+C) = AB + AC$ を用いてもよい. 同様に $BA = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, CA = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, (B+C)A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ となる.

[2] 行列の積 AB は, A の列の数と B の行の数が一致するときに限り定義されるので, 全部で 12 通りの可能性のうち次の 6 個の積だけが定義される.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

[3] $A=[a_{ij}]$ を (l,m) 行列，$B=[b_{jk}]$ を (m,n) 行列とすると，積 AB が定義されて (l,n) 行列となる．このとき, 転置行列 ${}^t(AB)$ は，(n,l) 行列となる．一方，${}^tA=[a'_{ji}]$, ${}^tB=[b'_{kj}]$ は, それぞれ (m,l), (n,m) 行列となるので，${}^tB\ {}^tA$ も定義され (n,l) 行列で, ${}^t(AB)$ と同じ型であることが分かる．従って ${}^t(AB)={}^tB\ {}^tA$ であることを示すには，2 つの行列の ki 成分 $(1\leqq k\leqq n, 1\leqq I\leqq l)$ が全て一致していることを確かめればよい．まず

$$ {}^t(AB) \text{ の } ki \text{ 成分} = AB \text{ の } ik \text{ 成分 } = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} $$

次に $b'_{kj}=b_{jk}$, $a'_{ji}=a_{ij}$ より，

$$ {}^tB\ {}^tA \text{ の } ki \text{ 成分 } = \sum_{j=1}^{m} b'_{kj}a'_{ji} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} $$

であることから確かめられた．これを用いて ${}^t(A){}^t(A^{-1})={}^t(A^{-1}\ A)={}^tE_n=E_n$ および ${}^t(A^{-1}){}^tA={}^t(A\ A^{-1})={}^tE_n=E_n$ から ${}^t(A^{-1})=({}^tA)^{-1}$ が分かる．他の場合も同様であるが, その証明中，行列の逆行列は，存在すれば，ただ一つであることを用いるのが普通の方法である．自明ではない事実なので，証明を，自分で考えてみてください．

[4] $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ であることから, 全ての整数 m について $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^m=\begin{bmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．

$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると $A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$A^3=E_3$ となる．

一般に n 次正方行列 X の 0 次のべき X^0 は, E_n であるとする．従って $A^0=E_3$ となり, $A^{-m}=(A^{-1})^m$ と表すことができる．任意の整数 m にたいして A^m は，m を 3 で割った余りの $0,1,2$ に応じて A^m は，3 種類に分類される．すなわち $A^{3k}=E_3, A^{3k+1}=A$, $A^{3k+2}=A^2$(k は整数) となる．

$A=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると $A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A^3=O_3$ となる．$m>3$ の場合も, $A^m=A^{m-3}\ A^3=A^{m-3}O_3=O_3$ となる．

$A = \begin{bmatrix} 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$ のときは，$k \geqq 1$ について帰納的に $A^k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & k & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \text{列} & & \ddots & * \\ 0 & \dots & \text{目} & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{bmatrix}$

であることが示せる．従って $m \geqq n$ のとき，$A^m = O_n$ となる．

[5]　$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ のとき，$A^4 = A$ でべき等行列．$A = \begin{bmatrix} 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$ のときは，

$A^n = O_n$ でべき零行列である．

(特に $n = 3$ の場合として $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ の時も含む)．

[6]　$X^2 - (a+d)X = \begin{bmatrix} a^2 + bc - (a+d)a & ab + bd - (a+d)b \\ ac + cd - (a+d)c & bc + d^2 - (a+d)d \end{bmatrix} = -(ad - bc)E_2$　となり

ハミルトン・ケーリーの定理が成立することが分かる．

[7]　$X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0E_3 = (A - \alpha E_3)(A - \beta E_3)(A - \gamma E_3)$ に X を代入してみると，与式は O_3 となることが分かる．

[8]　$A = \dfrac{1}{2}(X + {}^tX), B = \dfrac{1}{2}(X - {}^tX)$ とすれば，A が求める対称行列，B が求める交代行列である．

[9]

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

とはき出し法をしてみると $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ であることが分かる．

同様に $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

注意）ここで $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ と $[1]^{-1} = [1]$ であることに気がついただろうか．一般に行列をいくつかのブロック（小行列という）に分けて，ブロックごとの積と全体の積の関係を整理すると，4 ブロックの場合は，$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{bmatrix}$ が成立した．従って今の場合は，$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ だったのである．

同様にして，$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 10 & -11 & 3 \end{bmatrix}$ となる．

[10] $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ を階段行列に変形すると $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1-x^2 \end{bmatrix}$ となる．もとの行列が，正則になるのは，ランクが 2 のときであり，その条件は $x \neq \pm 1$ となる．

次に $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$ は，行の基本変形で行列 $\begin{bmatrix} x+2 & x+2 & x+2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$ に変形できる．従って $x = -2$ のときは，正則でなく，$x \neq -2$ のときは，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ という階段行列に変形できるので，正則になるための条件は，$x \neq 1, -2$ であることが分かる．

同様に $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$ は，$x \neq 1, -3$ のとき正則である．

一般の場合は，これらから容易に推測でき証明できる．すなわち $\begin{bmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{bmatrix}$ は，

$x \neq 1, -n+1$ のとき正則である.

コラム [7] は, [6] で 2 次行列に対して示したハミルトン・ケーリーの定理が，3 次行列に対しても成り立つことを示すことの第一ステップにあたります．後で行列の標準形として，まず 3 角化ということを学びますが，この結果と組み合わせると，次のハミルトン・ケーリーの 3 次行列版が成立することを示すことが出来ます．すなわち，3 次の行列 X は，その特性（固有）多項式を $\Phi(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ とすると $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0E_3 = O_3$ をみたすことがわかります.

第 3 章の問題の略解

問 1 (1) $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

問 2 $\boldsymbol{w}_1 = 0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3$. $\boldsymbol{w}_2$ は表せない. $\boldsymbol{w}_3 = (-2x - \frac{5}{3}z)\boldsymbol{v}_1 + (y + \frac{5}{3}z)\boldsymbol{v}_2 + (x + \frac{2}{3}z)\boldsymbol{v}_3$

問 3 条件 $W1)$ は共通であり，問 3 の条件で $a = b = 1$ とした場合が $W2)$, $b = 0$ とした場合が $W3)$ であるので，問 3 の条件が「部分空間であること」の十分条件であることはわかる．必要条件であることは，$W2), W3)$ を合わせて用いて示すことができる.

問 4 問 3 を用いて示すことができる

問 5 $\mathbf{W}_1$ は部分空間. $\mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3, \mathbf{W}_4$ は部分空間ではない.

問 6 問 3 を用いて示すことができる．例えば, $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ の場合は, 任意の実数 a_1,a_2 と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ に対して，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{V}$ なので $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{V}$，また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{W}$ であることから $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{W}$ も同じく成立するので, 結局 $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ が成立する．よって $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ が部分空間であることが確かめられた.

問 7 $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$. $\boldsymbol{w}_2 = x\boldsymbol{v}_1 + (x+y)\boldsymbol{v}_2 + (x+y+z)\boldsymbol{v}_3$. $\boldsymbol{w}_3$ は表せない.

問 8

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ (注： $\boldsymbol{R}^2$ と一致するので標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を答えとしても良い)

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, (3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 注意) $\boldsymbol{R}^3$ と一致するのでこの場合も, 標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を答えとすることができる.

問 9 (1) 2 次元, (2) 3 次元, (3) 2 次元

第 3 章 演習問題解答

[**1**] 最初のケースは，一次結合

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

とおくと，a, b の連立 1 次方程式 $a+2b=0,\ 2a+b=0,\ 3a+b=0$ の解を求めることになる．この解は，$a=b=0$ しかないので，2 つのベクトルは，1 次独立であることが分かる．
次の場合も，一次結合

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}7\\-4\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を解くために行列 $\begin{bmatrix}1&2&7\\2&1&-4\\3&1&-9\end{bmatrix}$ を行の基本変形で階段行列 B にすると, $B=\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&6\\0&0&0\end{bmatrix}$ とランクは，2 であり，定理 3.2. より与えられたベクトルの組は，1 次従属であることがわかる．

注意）この説明では少しわかり難い点があるので, 補足しておきます．定理 3.2 では 1 次独立であることの必要十分条件が与えてあります．従ってその補集合に対して**ウラ定理 3.2** と言うべき次の命題が隠れた形で証明されていることに注意しておこう．

> **ウラ定理 3.2** $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in \boldsymbol{R}^m$ とし，$A = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r]$ とするとき，次の条件は同値である．
>
> (1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が **1 次従属**
>
> (2) 同時連立 1 次方程式A $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$が，自明でない解 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ を持つ
>
> (3) rank $A < r$

従って, 今の場合 rank $A = 2 < 3 =$ 判定のベクトルの数 であるので, 与えられた 3 つのベクトルは, 1 次従属であることがわかる．なお実際に最後の階段行列から

$$5\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\-4\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

となって，自明でない 1 次結合が零ベクトルを表すことを示して, 1 次従属であることを具体的

に確かめることもできる.

最後の場合は，与えられた 4 個のベクトルを列ベクトルとする 4 次行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ が，行の基本変形で，階段行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ に変形できるので，$\mathrm{rank}\, A = 3$ で，与えられたベクトルは，定理 3.2. により 1 次従属であることが分かる.

[**2**] 定理 3.2. より，与えられた 3 つのベクトルを列ベクトルとする 3 次行列のランクが 3 であるための必要十分条件を求めればよい．これは，第 1 章の例題 1.3. と同様にして（係数行列が例題 1.3. の転置行列になっていることだけ注意すれば，結果はまったく同様に）$a \neq b, b \neq c, c \neq a$ がランクが 3 となるための条件となる.

[**3**] 与えられた 4 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ x \end{pmatrix},$$

を並べた 4 次行列は，行に関する基本変形で $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{bmatrix}$ と変形される．$x = 3$ ならランクは 3，$x \neq 3$ ならランクは，4 となるので，1 次独立となる条件は，$x \neq 3$．またこのとき，標準基底が

$$\boldsymbol{e}_4 = \frac{1}{x-3}(\boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{v}_3) \in \mathbf{V} = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle,\ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{e}_4 \in \mathbf{V},$$
$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4 \in \mathbf{V},\ \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4 \in \mathbf{V}$$

と $\mathbf{V} = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ に属するので，$\mathbf{V} = \boldsymbol{R}^4$ であることが確かめられる.

[**4**] それぞれの場合のベクトルを，列にして並べた行列のランクを確かめると $n = 3$ のときは，ランク 3，$n = 5$ のときは，ランク 5 で 1 次独立であることが分かる．一般に定理 3.2. (1) より

<u>$(*)$ m 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^m$ の m 次元部分空間 $\mathbf{V}$ は，$\boldsymbol{R}^m$ と一致せざるを得ないこと</u>

からそれぞれのベクトルの組は，数ベクトル空間の基底であることが分かる.

注意）$(*)$ の証明は，まず $\mathbf{V}$ の 1 組の基底を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ とする．任意の $\boldsymbol{R}^m$ のベクトル $\boldsymbol{w}$ について，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}$ は，定理 3.2. (1) より 1 次従属である．このとき，零ベクトルを

表す自明でない 1 次結合 $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{v}_m + b\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ において，$b = 0$ という場合は，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が 1 次独立であることから起こりえない．従って $b \neq 0$ となり，任意のベクトル $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^m$ は

$$\boldsymbol{w} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle = \mathbf{V}$$

をみたすことが分かる．すなわち $\boldsymbol{R}^m \subset \mathbf{V}$ となり，自明な包含関係 $\mathbf{V} \subset \boldsymbol{R}^m$ と組み合わせて，$\mathbf{V} = \boldsymbol{R}^m$ であることが示せた．

さらに一般の n の場合は, n が奇数のときは 1 次独立, n が偶数の場合は 1 次従属であることが示せる．この問題は $n = 3, 5$ のときで奇数の場合の例になっている．[1] の最後の場合は, $n = 4$ で偶数の場合の例になっている．

[**5**] 基底として，次のものがとれることを示せばよい．

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

第 4 章の問題の略解

問 1

性質 (I) は, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{vmatrix} a & (b+b') \\ c & (d+d') \end{vmatrix} = a(d+d') - (b+b')c = (ad - bc) + (ad' - b'c) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$$

性質 (II) も同様にして, $\begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = a(kd) - (kb)c = k(ad - bc) = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

性質 (III）は, $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

性質 (IV）は $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = ac - ac = 0$

性質 (V) は

$$\begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{vmatrix} = a(d+kc)-(b+ka)c = ad-bc+k(ac-ac) = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

性質 (VI) は, $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

問 2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とするとき, A の列ベクトルが 1 次従属 $\Longleftrightarrow |A| = 0$ を示せばよい.

列ベクトルが 1 次従属 $\Longleftrightarrow$ 少なくとも片方は 0 ではない x, y に対して $x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

仮に $x \neq 0$ とする. この場合は $k = -\dfrac{y}{x}$ とおけば, 条件 $x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を変更して $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を得る. 従って行列式の性質 (IV), (V) より $|A| = 0$ が言える.

逆を示すには, A が零行列の場合は明らかに列ベクトルは 1 次従属なので, どこかの成分 (仮に $a \neq 0$ とする. $|A| = ad-bc = 0$ を使えば, 1 次従属性 $(-b)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を得る.

問 3 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2a & 4a \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} = ab(b-a)$, $\begin{vmatrix} a+x & a+y \\ a+y & a+x \end{vmatrix} = (x-y)(x+y+2a)$

問 4 $\boldsymbol{v}_1 \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = x_1\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + y_1\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$

$= x_1(y_1z_2 - y_2z_1) + y_1(z_1x_2 - x_1z_2) + z_1(x_1y_2 - x_2y_1)$

$= (x_1y_1z_2 - x_1y_2z_1) + (x_2y_1z_1 - x_1y_1z_2) + (x_1y_2z_1 - x_2y_1z_1) = 0.$

$\boldsymbol{v}_2$ についても同様に確かめられる.

問 5 代入して 2 次行列式を展開すれば確かめられる.

問 6 まず $|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}|$ を確かめることができる. あとは, 2 次行列の場合と同様に示すことができる. 例えば (I) の場合, $|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}')| = |(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}')\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}| = (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}') \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}' \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}'|$.

問 7 (1) -18, (2) 0, (3) -18, (4) 0.

問 8

(1) $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\tau\sigma\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

問 9 例えば, $\sigma = (12)$ のときは, 転倒数が 1 なので符号 $\varepsilon(\sigma) = -1$. このとき $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3} = a_{21}a_{12}a_{33}$ の係数は -1 で一致する. 他の場合も同様に確かめられる.

問 10 それぞれの符号は, 順に $-1, +1, +1$ となる.

問 11

(1) $i < j$ とすると $\sigma = (ij)$ の転倒数は, $i(\sigma) = 2(j-i-1)+1$ なので $\varepsilon(\sigma) = -1$.
(2) $\sigma \in S_n$ が $\sigma(n) = n$ をみたすなら自然な埋め込み $S_{n-1} \longrightarrow S_n$ を $\tau \in S_{n-1}$ の像 $\bar{\tau}$ を $\bar{\tau}(i) = \tau(i)$ $(1 \leqq i \leqq n-1), \bar{\tau}(n) = n$ で定めて, 上の (1) と n についての帰納法を用いて証明できる.
(3) 転倒数に関して, $I(\sigma\tau) - I(\sigma) - I(\tau)$ が常に偶数であることを示せばよい.
(4) $\sigma S_n \subset S_n$ および $\sigma^{-1}S_n \subset S_n$ は明らかである．後ろの包含関係から前と逆の包含関係 $S_n \subset \sigma S_n$ が得られるので，等号が成立することを証明できる．
(5) 恒等置換 e の転倒数は 0 なので $\varepsilon(e) = 1$. 従って, (3) より $\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}) = 1$ なので 逆置換の符号は元の置換の符号と一致することが分かる.
後半は, $\{\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\} \subset S_n$ は自明であるが, $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$ であることから逆の包含関係も成り立つ.

問 12 偶置換全体を A_n と表す. A_n は n **次交代群**と呼ばれている. 奇置換全体を仮に B_n で表すと, 命題 4.1 の (3) より偶置換と奇置換の積は, 奇置換, 奇置換と奇置換の積は, 偶置換となる.
従って, $(12)A_n \subset B_n$, $(12)B_n \subset A_n$ から $B_n = (12)A_n$ となる. ここで異なる置換 σ, τ に対して $(12)\sigma \neq (12)\tau$ であることと, $A_n \cup B_n = S_n$ より題意が成立する.

問 13 (1) 6, (2) 0, (3) 1.

第 4 章 演習問題解答

[**1**] 2 次の行列式は, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. 同じく，2 次の行列式なので

$$\begin{vmatrix} a+b\sqrt{-1} & -c-d\sqrt{-1} \\ c-d\sqrt{-1} & a-b\sqrt{-1} \end{vmatrix} = (a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1}) = a^2+b^2+c^2+d^2$$

同様にして，$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 - 1 = 3$

第 2 列の -1 倍を第 1 列に加え，-2 倍を第 3 列に加えて，

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 4 + 4 = 6$$

与えられた行列が上三角行列の場合は，行列式は対角成分の積なので，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times (-2) = 2$$

第 1 列に関する余因子展開により，$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 2 = 4$

第 2 列に第 1 列の -1 倍を加え，第 4 列に第 3 列の -1 倍を加えると第 2 列と第 4 列が一致して，行列式の交代性から，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$

第 1 列に関する余因子展開により，$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3 = 5$

[**2**] 行列の積を計算して $\begin{vmatrix} 14 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4$

注意）次の章で出てくる行列の積の行列式の性質 $|A|\ |B| = |AB|$ を使えば，$2 \times 2 = 4$ がすぐに示せる．

次の行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

は，$x_1, x_2, \ldots, X_n$ の多項式なので $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と表しておく．f は, 各行から成分を 1 つずつ選んで積を取ることから，各単項式自体が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の $n-1+\cdots+1 = n(n-1)/2$

次の多項式である．行列式は，第 j 列に第 i 列の (-1) 倍を加えても変わらないことから f は，$n(n-1)/2$ 個の 1 次式 $x_j - x_i \ \ (j > i)$ で割り切れることが分かる．従って f は，差積 Δ で割り切れることは分かる．また双方の次数を比較すると f と Δ は同じ $n(n-1)/2$ 次式なので 2 つの多項式は，定数倍の差しかない．ここで f, Δ の $x_n^{n-1}x_{n-1}^{n-2}\cdots x_3^2x_2$ の係数が共に 1 であることから $f = \Delta$ が成立する．この問題で与えられた形の行列式を **ヴァンデルモンドの行列式** という．

[**3**] n に関する帰納法で証明できる．まず最初の 2 つは，直接 $a_1 = |2| = 2, a_3 = 2^2 - 1 = 3$ で $a_n = n+1$ をみたすことがわかる．次に a_n の第 1 列に関する展開から漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ を得る．帰納法の仮定から $a_n = 2n - (n-1) = n+1$ となり，帰納法が成立する．

[**4**] 左側の行列式は，例えば $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ のように，一番右の列から順番に 1 つ前の列の -1 倍を加えていくと対角成分が 1 の下三角行列の行列式となり，全て 1 であることがわかる．
真ん中の行列式は，上から順に $1, -1, 0$ であることがすぐ分かる．
一番右の行列式は，第 1 行に他の全ての行を加えて整理してゆくと，次のようになる．

$$\begin{vmatrix} x+a & a \\ a & x+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2a & x+2a \\ a & x+a \end{vmatrix} = (x+2a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & x+a \end{vmatrix} = (x+2a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x(x+2a)$$

$$\begin{vmatrix} x+a & a & a \\ a & x+a & a \\ a & a & x+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & x+3a & x+3a \\ a & x+a & a \\ a & a & x+a \end{vmatrix} = (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x+a & a \\ a & a & x+a \end{vmatrix}$$

$= (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2(x+3a)$．同様にして最後の式は，$x^3(x+4a)$ となる．

[**5**]

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & c & 0 \\ a & b & a & b \\ c & d & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -c & d \end{vmatrix} = (ad-bc)(ad+bc)$$

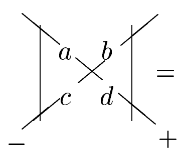
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c & b+d & c & d \\ b+d & a+c & d & c \\ a+c & b+d & a & b \\ b+d & a+c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c & b+d & c & d \\ b+d & a+c & d & c \\ 0 & 0 & a-c & b-d \\ 0 & 0 & b-d & a-c \end{vmatrix}$$

$= ((a+c)^2-(b+d)^2)((a-c)^2-(b-d)^2)) = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)$

[**6**] 一番最初の行列式は，[4] の低次数の場合と全く同様にして, 1 である.
次の行列式も [4] から，$n = 2$ のときは，1, $n = 3$ のときは，-1 で，$n \geqq 4$ の場合は，同じ列が現れるので，0 となる.
次の行列式も [4] から $x^{n-1}(x + na)$ であることがわかる.
最後の行列式を a_n とすると，第 1 列に関する展開で漸化式 $a_n = (1 + x^2)a_{n-1} - x^2 a_{n-2}$ を得る. あとは，帰納法で $a_n = x^{2n} + x^{2n-2} + \cdots + x^2 + 1$ を示すことができる.

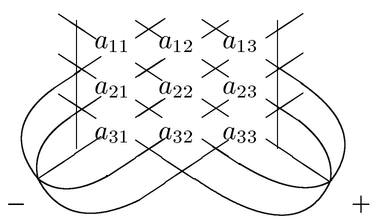
注意）2 次と 3 次の行列式は，次のように**サラスの方法**という符号の覚え方がある. ただしこのやり方で 4 次の行列式の符号を覚えるのは，難しい. 4 次以上の行列式は，行列式の性質や余因子展開を用いて計算するのが基本であり無難である.

(1) 2 次の場合のサラスの方法



$= ad - bc$

(2) 3 次の場合のサラスの方法



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{32}a_{12}a_{23} - a_{31}a22a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

[**7**] (1) 行列のサイズを 2 として考える. 行列 A の各縦ベクトル変数を縦単位ベクトルの線形結合にばらして関数 f の定義にあてはめる. $f(A) = f(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2, a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2)$
$= a_{11}a_{22}f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_{12}a_{21}(-f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)) = |A|f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = f(E)|A|$

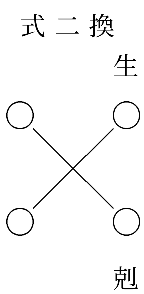
(2) (1) より, $f(AB) = f(E)|AB|$.

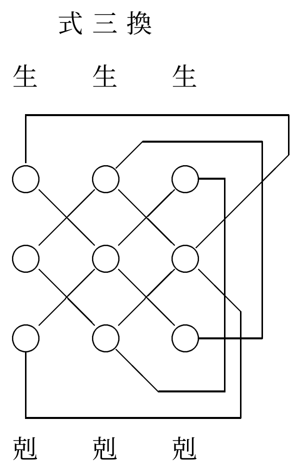
一方, $f(AB) = f\left([\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) = f(\boldsymbol{a}_1 b_{11} + \boldsymbol{a}_2 b_{21}, \boldsymbol{a}_1 b_{12} + \boldsymbol{a}_2 b_{22})$

$= b_{11}b_{22}f(A) + b_{12}b_{21}(-f(A)) = |B|f(A) = f(E)|B||A|$. $f(E) \neq 0$ より, $|AB| = |A||B|$

(コラム 1) 和算でのサラスの公式の図

関孝和全集 七,「解伏題之法 (ふくだいをとくのほう)」(一六八三, 重陽日重訂) の (156p) より換二式, 換三式を書き写しておこう. 旧仮名遣いで右から左に書いています.





注) この図で (生) は, + を表し, (剋) は, − を表す. また縦書きで右から数字を書いているのでページ上の通常のサラスの公式とは, 左右が反転した図になっていることに注意しておく.

なお 1992 年発行の関孝和の記念切手の背景には, 同全集 157p の 4 次の展開式の図 (換四式) が使ってある. ただし換四式および換五式の図の解釈は, 関の弟子たちにとっても難しいものだったらしい. これらの事情や解釈は, 下記の小川束氏の文献に詳しい. またこの切手の図柄自体は, 「数学の切手コレクション (R.J. ウイルソン著 (熊原啓作訳)) シュプリンガー・フェアラーク東京 (2003) p114 の切手図案」を参照してください.

(コラム 2) 行列式の起源について

「(1) 関孝和全集 （平山諦, 下平和夫, 広瀬秀雄 共編）大阪教育図書 1974」および「(2) 関孝和 – その業績と伝記 = (平山諦著) 恒星社厚生閣 1974」を基に行列式と和算との関わりについてここで少しまとめておく. 「代数学講義（高木貞治著）共立出版 (改訂版)1965」の 8 章に次のような記述がある.

> 「行列式の起源は連立 1 次方程式の一般的解法にある. 西洋の数学史では行列式は Leibniz の書簡 (1678?[a]) 中の記載を初出とするが, その書簡は後年に発見されたのである. その後 Cramer が曲線論に関する著書 (1750) において任意数の未知数を含める一次方程式の解法を示してから, ようやく学界の注意をひき起こし, 後に Cauchy(1815), Jacobi(1841) に至って, 現今の行列式論の基礎が出来たのである」

このように西洋中心の数学史では, ライプニッツが 1680 年前後に最初に行列式について言及したとされている. 一方同時期に, 鎖国の下の江戸時代の日本で独自に発達した数学があった. 現在ではそれを**和算**と呼んでいるが, 当時の日本は, 寺子屋制度を通じて世界的にも高い教育水準を誇っていた. しかし実用面での「読み書き算盤」という面に留まらず, 和算では関孝和とその弟子の建部賢弘による円周率の計算法等世界に通じる研究がなされていたこともわかっている[b] . 行列式に関しても関孝和（1642?[c] -1708）が 1683 年に「解伏題之法」（関孝和全集 143p − 158p）を著してその中で 2 次から 5 次の行列式について述べている. 関孝和は, 2 次と 3 次の場合に, サラスの手法と本質的に同一の展開式を与えている. その後余因子展開に当たるものも 1690 年に井関知辰によって考案されている[d] . なお関の問題意識は, 連立した高次の方程式に共通解があるか無いかの判定条件を求めることにあった[e]

[a] これが平山 (2) では 1693 年となっている

[b] 円周率の計算に関する読み物として, 建部賢弘を主人公にした小説「円周率を計算した男 (鳴海風著)」がある.

[c] 関孝和（せきたかかず）に関する平山諦の上記の 2 文献によれば生年に関して有力な 2 説があり現在のところ生年は確定していない.

[d] これらの事情に関する研究成果は, 「小川束,「関孝和と行列式」, 数学の楽しみ 2006 夏「関孝和と建部賢弘」p67-p86 (2006)」を参照してみてください

[e] これは, 所謂 **終結式**の理論であって後にベズーやシルベスターが扱った物と 0 でない定数倍のずれしかない. 従って関が得た条件は, 本質的にはシルベスターの終結式と同じ判定条件である. 終結式の定義や性質については, 「代数学講義」(高木貞治著) を参照してみてください.

第 5 章の問題の略解

問 1 (1) $x = 1, y = \sqrt{-1}$, (2) $x = 1, y = 0, z = -1$.

問 2　$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　のとき $|A| = ad - bc$, さらに各余因子は,

$\Delta_{11} = |d| = d, \Delta_{12} = (-1)^3|c| = -c, \Delta_{21} = (-1)^3|b| = -b, \Delta_{22} = |a| = a$　であるから

逆行列の公式を適用すると $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

これが，2 次行列の逆行列の公式に他ならない.

問 3　$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,　$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,　$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} & 2 \\ 1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$

問 4　2 番目の条件が

A が正則　$\Longleftrightarrow$　A を係数行列とする連立 1 次方程式は どんなベクトル $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{C}^n$
に対しても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる解ベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$ をただ 1 つ持つ

となるだけで，他は同じ.

問 5　$\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$,　$\dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$,　$\dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$,　$\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$
より $J(t, \theta) = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$.

問 6　問 5 と同様にして, $r^2 \sin\theta$ となる.

第 5 章 演習問題解答

[**1**] 行列が正則かそうでないかは，行列式が 0 になるかならないかで判定できるので，まず 4 つの行列の行列式を計算する.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 2, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 2 + 2 - 2 - 4 - 3 = 1, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

これから (1), (3) の行列は，逆行列をもち，(2), (4) の行列は，逆行列をもたないことが分かる.

(1) の場合は，余因子を用いた逆行列の公式は，2 次行列の逆行列の公式なので，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ である.

(3) の行列を A とすると，逆行列の公式は，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\ {}^t[\Delta_{ij}]$ である．$|A| = 1$ なので，逆行列は,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix} \text{ である.}$$

各余因子 Δ_{ij} の $(-1)^{(i+j)}$ を付け忘れないように注意して計算すると

$$\Delta_{11} = (-1)^{(1+1)}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Delta_{21} = (-1)^{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \Delta_{31} = (-1)^{4}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{(1+2)}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \Delta_{22} = (-1)^{4}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \Delta_{32} = (-1)^{5}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{(1+3)}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_{23} = (-1)^{5}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \Delta_{33} = (-1)^{6}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

従って $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

注意）元の行列が対称行列であり，得られた逆行列も対称行列であることに気がついたでしょうか？これは，A が対称行列であれば，余因子が $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$ をみたすことから，一般に成り立つ性質です．この事実は，余因子を用いた「逆行列の公式」の観点から見れば容易にわかります．しかし，逆行列を求める最初に学んだ方法である「はき出し法」の視点では，示すのは容易ではない性質です.

[**2**]

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

行列の積の行列式の性質から $|AB| = |A|\ |B| = |B|\ |A| = 1 \times 1 = 1$ である.

次に, この章の問 3 から, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ がわかる.

次に $B = {}^t A$ および, 一般に転置行列の逆行列は, 逆行列の転置行列であることから,

$$B^{-1} = ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) = {}^t\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

最後に 2 つの正則行列 X, Y の積 XY は, 正則であることと, $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$ という性質から, 次のように求める逆行列が得られる.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

さて, AB は, [1] (3) の行列なので, 今やったのは, [1] (3) の逆行列をまた別の考え方で求めたことになっていることに気がついたでしょうか.

第 6 章の問題の略解

問 1

(1) $A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であり $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ なので, 求める面積は, 3.

(2) $A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり, 一辺の長さ 1 の正方形の面積なので 1.

問 2

f_X による像は $O' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$,

$E' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $F' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $G' = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ である.

(注意）立体 $O'A'D'B'C'F'G'E'$ の体積は 3）

f_Y による像は $O' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,

$E' = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$, $F' = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$, $G' = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$ である.（注意）$O'A'D'B'C'F'G'E'$ は同じ平面 $-7x - 3y + 4z = 0$ 上にある）.

(2) 12 本の線分は, 平行な 4 本ずつの線分の 3 組に分かれる. f_x, f_Y のどちらの 1 次変換でも, 平行な線分の組 4 本の像はやはり平行な線分となることが分かる.

第 6 章 演習問題解答

[**1**] (1) では, 1 次変換 $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 3x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, および

1 次変換 $f\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x'+y' \\ 3x'+4y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるように $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, および $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

を求める必要があるが, 1 次変換 $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 3x+4y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ なので,

結局 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を解くことになる.

はき出し法で $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めればよいから, $\begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

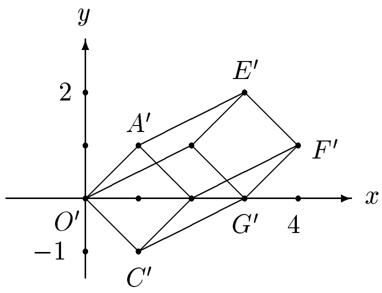
となり, 元の図形は, 原点と, $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を頂点とする平行四辺形である.

(2) まず O, A, B, C, D, E, F, G それぞれの f による像を $O', A', B', C', D', E', F', G'$ とする.

$$O' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$D' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F' = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので，図示すると，次のような 6 角形に移ることが分かる．



(3) は，(2) と同様に

$$1\text{次変換 } f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

であるので，3 次正則行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めれば良いことが分かる．はき出し法で

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

であることから，元の図形は，A の 3 つの列ベクトルと原点を隣り合う 3 辺とするような平行 6 面体であることが分かる．ちなみにこの平行 6 面体の 8 個の頂点の座標は，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である．

[**2**] 本質的には，固有値と固有ベクトルの所でわかるのであるが，f は，直線 $y = x$ の方向に直線 $y = -x$ を対象の中心として平面を 3 倍に引き延ばす写像であることが分かる．f によって，(1) の正方形は，菱形に，(2) は，直角 3 角形（これは，(2) の直角三角形の位置が特殊なことに依存していて，一般には起きない現象である)．また (3) は，楕円，(4) は，下の右の図 B のような斜めに引き延ばしたウサギの絵になるはずです．g では，x 軸を中心として，y 軸方向に 2 倍に引き延ばす写像なので，それぞれ，長方形，3 角形（直角でない），楕円になり，最後の (4) は下の左の図 A のような縦長のウサギの絵となります．

183A1.eps 183B1.eps

図 A 図 B

[**3**] (1) 点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は対称な点 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に移り, 点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は動かないので, その変換行列を $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくと, $a + b = 1, c + d = -1; a = 1, c = 0$, よって $b = 0, d = -1$. 実際, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ となっている.

(2) (1) と同様に, 変換行列を B とおくと, 点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は点 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に移り, 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は動かないので, その変換行列を $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくと, $a + b = -1, c + d = 1; b = 0, d = 1$, よって $a = -1, c = 0$. 実際, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.

(3) 前問同様, 1 次独立な 2 点, 例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を採れば, その変換行列を $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくと, $a = -1, c = 0; b = 0, d = -1$. 実際, $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

(4) 1 次独立な 2 点, 例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとれば, その変換行列を $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくと, $a = 0, c = 1; a + b = 1, c + d = 1$ より $b = 1, d = 0$. 実際, $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

(5) 1 次独立な二つのベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ の選び方は無数にあるが, 例えば

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 相似変換行列を $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくと,

$F\boldsymbol{x}_j = \lambda \boldsymbol{x}_j$ $(j = 1, 2)$ より F は $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ に決まる.

(6) 複素数平面 $\boldsymbol{C}$ 上の複素数 $\boldsymbol{x} = x + iy$, ここに $i = \exp(2\pi i/4) = \sqrt{-1}$, を実軸を x 軸, 虚軸を y 軸と看做して, ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と同一視する. すなわち, 変換行列 A の複素数 $\boldsymbol{x} = x + iy$ に対する写像 $A(\boldsymbol{x})$ はベクトル $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定める. $\boldsymbol{x}$ は極形式 $r\exp(\theta i) = x + iy$, x, y は実数, をもつ. ここに $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ は $\boldsymbol{x}$ の長さ, θ は $\tan\theta = y/x$ $(-\pi < \theta \leqq \pi)$ で決まる $\boldsymbol{x}$ の偏角を表す. すなわち $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. (1) 複素数 $\boldsymbol{x} = r\exp(\theta i)$ の実軸対称は $\overline{\boldsymbol{x}} = r\exp(-\theta i)$ となるので, $\boldsymbol{x} = x + iy = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$ はその複素共役 $\overline{\boldsymbol{x}} = r\cos(-\theta) + ir\sin(-\theta) = \cos(\theta) - ir\sin(\theta) = x - iy$ へ移る. よってその変換行列 A は初めに解いた $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と一致する.

(3) は, 複素数 $\boldsymbol{x} = r\exp(\theta i)$ の原点対称は $\boldsymbol{x}$ を原点の周りに回転角 π だけ時計または反時計回りに回転させたものと同じなので $\boldsymbol{x} = r\exp((\theta \pm \pi)i) = r\cos(\theta \pm \pi) + ir\sin(\theta \pm \pi)$ $= -r\cos(\theta) - ir\sin(\theta) = -x + i(-y)$. よって, その変換行列 C は初めに解いた $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ と一致する.

(2) は, 複素数 $\boldsymbol{x} = r\exp(\theta i)$ の虚軸対称は $-\overline{\boldsymbol{x}} = -r\exp(-\theta i)$ となるので, $\boldsymbol{x} = x + iy = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$ はその複素共役 $\overline{\boldsymbol{x}} = r\cos(-\theta) + ir\sin(-\theta)$ の原点対称 $= -(\cos(\theta) - ir\sin(\theta))$ $= -x + iy$ へ移る. あるいは, $\boldsymbol{x}$ を原点の周りに回転角 $\pi - 2\theta$ だけ反時計回りに回転させたものと同じなので, $\boldsymbol{x} = r\exp((\pi - \theta)i) = r\cos(\pi - \theta) + ir\sin(\pi - \theta) = r(-\cos(\theta)) + ir\sin(\theta)$ $= -x + iy$. よって, その変換行列 B は初めに解いた $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と一致する.

(4) は, 複素数 $\boldsymbol{x} = r\exp(\theta i)$ の直線 $y = x$ に関する対称変換は $\boldsymbol{x}$ を原点の周りに回転角 $\pi/2 - 2\theta$ だけ反時計回りに回転させたものと同じなので $\boldsymbol{x} = r\exp((\pi/2 - \theta)i) = r\cos(\pi/2 - \theta) + ir\sin(\pi/2 - \theta) = r\sin(\theta) + ir\cos(\theta) = y + ix$. よって, その変換行列 C は初めに解いた $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ と一致する.

(5) は, 実数 λ に対し, 複素数 $\boldsymbol{x} = r\exp(\theta i) = x + iy$ の λ 倍相似変換は $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x} = \lambda r\exp(\theta i)$

$= \lambda x + i\lambda y$ に移すので, その変換行列 C は初めに解いた $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ と一致する.

第 7 章の問題の略解

問 1

まず自明な包含関係 $Im\ f_A \subset \boldsymbol{R}^m$ が常に成立する. 全射であるための必要十分条件は, $Im\ f_A \supset \boldsymbol{R}^m$ だったので, 全射であれば $Im\ f_A = \boldsymbol{R}^m$ が成立する. 逆に $Im\ f_A = \boldsymbol{R}^m$ であれば, $Im\ f_A \supset \boldsymbol{R}^m$ なので, 全射であることは明らかである. また常に $f_A(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ が成立する.
単射であれば, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \Longrightarrow f_A(\boldsymbol{v}) \neq f_A(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. 従って $Ker\ f_A = \{\boldsymbol{0}\}$.
逆に $Ker\ f_A = \{\boldsymbol{0}\}$ であれば, $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2$ のとき $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \neq \boldsymbol{0}$ なので, $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \notin Ker\ f_A$. 従って $\boldsymbol{0} \neq f_A(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = f_A(\boldsymbol{v}_1) - f_A(\boldsymbol{v}_2)$, すなわち $f_A(\boldsymbol{v}_1) \neq f_A(\boldsymbol{v}_2)$ がいえる.

問 2

(1) 像の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ が取れる. 核は零空間 $\{\boldsymbol{0}\}$.

(2) 像の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が取れる. 核の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

問 3 $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 9 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 11 & -6 \\ 11 & 17 & -9 \\ 18 & 29 & -15 \end{bmatrix}$

第 7 章 演習問題解答

[**1**] $f_1(\boldsymbol{v}) = [a\ b](\boldsymbol{v})$ なので，f_1 は，行列 $A = [a\ b]$ によって決まる線形写像である.
f_2 は，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，$f_2(\boldsymbol{v}_1) = f_2(\boldsymbol{v}_2) = 0$ で，$f_2(\boldsymbol{v}_3) = 1$ である．ところが $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_3$ なので，$f_2(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \neq f_2(\boldsymbol{v}_1) + f_2(\boldsymbol{v}_2)$ であり，f_2 は，線形写像の線形性 L をみ たしていないので，線形写像ではないことが分かる.
f_3 も，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ について $f_3(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \neq f_3(\boldsymbol{v}_1) + f_3(\boldsymbol{v}_2)$ であり，f_3 についても線形写像がみたす線形性 L が成り立たないので，線形写像ではないことが分かる.

[**2**] f_1, f_2, f_3 を定める行列をそれぞれ A_1, A_2, A_3 とすると，

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = [1, 1, \ldots, 1]$$

であり，ランクはそれぞれ，$2, 2, 1$ である．従って像の次元は，順番に $2, 2, 1$ で，核の次元は，次元公式から順番に $0 = 2 - 2, 1 = 3 - 2, n - 1 = n - 1$ である．

[**3**] 第 3 章の演習問題 [1] と [4] から，$n = 3, 4, 5$ のときの表現行列 A のランクは，それぞれ $3, 3, 5$ であることが分かる．次元公式から核の次元は，それぞれ $0, 1, 0$ であることがわかる．従って $n = 3, 5$ のときは，像の基底は，A の n 個ベクトルの組で，核は，零空間である．

$n = 4$ のときは，$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ は，行の基本変形で，階段行列 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

に変形できるので，階段行列 B は，$(1, 2, 3)$ 型で，像の基底は，A の 1，2，3 列の列ベクトルで，核の基底は，同時連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解空間は, 次元公式から 1 次元ベクトル空間

であることがわかる．よって基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる．

[**4**](1) いま，$\displaystyle\sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ とする． 両辺を写像 f で移せば，$f\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{v}_j\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} a_j f(\boldsymbol{v}_j)$
$= \displaystyle\sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots \boldsymbol{w}_r$ は 1 次独立であるから, $\forall a_j = 0 \ (1 \leqq j \leqq r)$.

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \displaystyle\sum_{j=1}^{r} c_j \boldsymbol{v}_j$ を写像 f で移してみると

$f(\boldsymbol{v}') = f(\boldsymbol{v}) - \displaystyle\sum_{j=1}^{r} c_j f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{w}_j - \sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{0}$. よって $\boldsymbol{v}' \in Kerf$.

(3) ベクトル $\boldsymbol{v}'$ は $Kerf = \boldsymbol{R}[\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \cdots \boldsymbol{v}_{r+s}]$ に含まれので, $\boldsymbol{v}'$ は $\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \cdots \boldsymbol{v}_{r+s}$ の 1 次結合 $\boldsymbol{v}' = \displaystyle\sum_{k=1}^{s} d_k \boldsymbol{v}_{r+k}$ で表される．(2) より $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \displaystyle\sum_{j=1}^{r} c_j \boldsymbol{v}_j \in \boldsymbol{R}[\boldsymbol{v}_1, \cdots \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots \boldsymbol{v}_{r+s}]$.

(4) いま，$\displaystyle\sum_{j=1}^{r+s} b_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ とする． 両辺を写像 f で移せば，$f\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{r+s} b_j \boldsymbol{v}_j\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} b_j \boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{0}$.

よって $b_1 = \cdots b_r = 0$. 従って，$\displaystyle\sum_{j=r+1}^{r+s} b_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$. (1) より $b_{r+1} = 0, \cdots, b_{r+s} = 0$. ゆえに

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots \boldsymbol{v}_{r+s}$ は 1 次独立である.

第 8 章の問題の略解

問 1

(1) 固有値は, 1 と 2. 固有値 1 の固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 2 の固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 固有値は, $1, \pm\sqrt{2}$. 固有値 1 の固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 固有値 $\sqrt{2}$ の固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 $-\sqrt{2}$ の固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(3) 固有値は, $1, 2, 3$. 固有値 1 の固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 固有値 2 の固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 3 の固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

問 2 A の固有多項式は, $\varPhi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ で固有値は, 2 と 1 (重複度 2). 各固有値 λ の固有空間 $\boldsymbol{V}(\lambda)$ は,

$$\boldsymbol{V}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ x + y + z = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \boldsymbol{V}(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

B の固有多項式は, $\varPhi_B(x) = (x-1)^3(x-5)$ で固有値は, 5 と 1 (重複度 3). 固有値 1 の固有空間 $\boldsymbol{V}(1)$ は,

$$\boldsymbol{V}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \ x + y + z + w = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

固有値 5 の固有空間 $\boldsymbol{V}(5)$ は， $\boldsymbol{V}(5) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

C の固有多項式は, $\Phi_C(x) = (x-2)(x^2-3))$ で固有値は, 2 と $\pm\sqrt{3}$. 固有値 λ の固有空間 $\boldsymbol{V}(\lambda)$ は, $\boldsymbol{V}(2) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $\boldsymbol{V}(\pm\sqrt{3}) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm\sqrt{3} \end{pmatrix} \rangle$.

第 8 章 演習問題解答

[**1**] (1) では， $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ の固有多項式は,

$\Phi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -3 & x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-6 & x-6 \\ -3 & x-5 \end{vmatrix} = (x-6)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & x-5 \end{vmatrix} = (x-2)(x-6)$ なので,

固有値は, $2, 6$. 固有値 2 の固有ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(x, y)$ は, $A(2) = A - 2E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ より,

$x + y = 0$ をみたす. これにより, 固有値 2 の固有ベクトルとして, $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ がとれる.

同様に, 固有値 6 の場合は, $A(6) = A - 6E_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ より, 固有値 6 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ として, $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ がとれる.

$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ の固有多項式は, $\Phi_B(x) = \begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ -3 & x-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-1)-3 & -1 \\ -3 & (x-1)-5 \end{vmatrix}$
$= ((x-1)-2)((x-1)-7) = (x-3)(x-7)$ なので, 固有値は, $3, 7$ である. $B(3) = B - 3E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ より, A の場合と同様に, 固有値 3 の固有ベクトルとして, $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ がとれる.

同様に, 固有値 7 の場合は, $B(7) = B - 7E_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ より, 固有ベクトル, $\boldsymbol{v} =$

$t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ がとれる.

$C = \begin{bmatrix}1.5 & 0.5\\1.5 & 2.5\end{bmatrix}$ の固有多項式は, $\Phi_C(x) = \begin{vmatrix}x-1.5 & -0.5\\-1.5 & x-2.5\end{vmatrix} = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2x-3 & -1\\-3 & 2x-5\end{bmatrix}\right|$

$= \frac{1}{4}(x-2)((x-6) = (x-1)(x-3)$ なので, 固有値は, $1, 3$ である. $C(1) = C-E_2 = \begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\1.5 & 1.5\end{bmatrix}$

より, A と同様に 固有値 1 の固有ベクトルとして, $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ がとれる.

同様に, 固有値 3 の場合は, $C(3) = C - 3E_2 = \begin{bmatrix}-1.5 & 0.5\\1.5 & -0.5\end{bmatrix}$ より, 固有ベクトル, $\boldsymbol{v} =$

$t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ がとれる.

注意) なぜ 3 つの行列全てで, 固有ベクトルがまったく同じものが現れたかについての種明かしをしておきますが, 自分で考えて見たい人はここの部分は, 読み飛ばしてその理由を自分で考えてみてください.

まず A と B は $B = A + E_2$ とスカラー行列分だけずれているのがポイント. 以下 k はスカラーとする. 一般に $B = A + kE_n$ なら $B\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{v}$ より

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \Longleftrightarrow B\boldsymbol{v} = (\lambda + k)\boldsymbol{v}$$

である. 従って, A の固有値と B の固有値は k だけずれた値を持つ. また A の固有値 λ の固有空間を $\boldsymbol{V}(\lambda)$ とし, B の固有値 $\lambda + k$ の固有空間を $\boldsymbol{W}(\lambda + k)$ とすると

$$\boldsymbol{V}(\lambda) = \boldsymbol{W}(\lambda + k)$$

が成立する (この関係は, 一般の n 次行列で成立する).

次の関係では A と C は $C = \frac{1}{2}A$ とスカラー倍になっているのがポイント. 一般に $C = kA$ なら $C\boldsymbol{v} = kA\boldsymbol{v}$ より $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \Longleftrightarrow C\boldsymbol{v} = k\lambda\boldsymbol{v}$ である. 従って, C の固有値は A の固有値の k 倍となる. また A の固有値 λ の固有空間を $\boldsymbol{V}(\lambda)$ とし, C の固有値 $k\lambda$ の固有空間を $\boldsymbol{W}(k\lambda)$ とすると

$\boldsymbol{V}(\lambda) = \boldsymbol{W}(k\lambda)$ が成立する (この関係も, 一般の n 次行列で成立する).

$A = \begin{bmatrix}3 & 4\\-1 & -1\end{bmatrix}$ の固有多項式は, $\Phi_A(x) = \begin{vmatrix}x-3 & -4\\1 & x+1\end{vmatrix} = (x-1)^2$ なので, 固有値は, 1.

固有値 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(x, y)$ は, $A(1) = A - E_2 = \begin{bmatrix}2 & 4\\-1 & -2\end{bmatrix}$ より, $x + 2y = 0$ を

みたす．これにより, 固有値 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は, $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$．注意）この 2 次行列の場合は, 固有値 1 の重複度は 2 で, 固有空間の次元 $\dim \boldsymbol{V}(1) = 1 < 2$ である．

$A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix}$ および n 次のそれぞれのとき, まず $a = 0$ の場合には, 固有値は, 0(重複度は, 次数に応じて $2, 3, 4, n$) である．また 固有空間は, それぞれ $\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{R}^4, \boldsymbol{R}^n$ と全空間になる．複素空間で考えている場合は, 固有空間は, $\boldsymbol{C}^2, \boldsymbol{C}^3, \boldsymbol{C}^4, \boldsymbol{C}^n$ である．すなわち固有ベクトルは任意の $\boldsymbol{0}$ でないベクトルであれば良い．
次に $a \neq 0$ の場合には, 4 次の場合だけ途中経過を書き, $2, 3, n$ 次の場合は結果だけ略記しておく．4 次のときの, 固有多項式 $\Phi_A(x)$ は,

$$\begin{vmatrix} x-a & -a & -a & -a \\ -a & x-a & -a & -a \\ -a & -a & x-a & -a \\ -a & -a & -a & x-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4a & -a & -a & -a \\ x-4a & x-a & -a & -a \\ x-4a & -a & x-a & -a \\ x-4a & -a & -a & x-a \end{vmatrix} = (x-4a)\begin{vmatrix} 1 & -a & -a & -a \\ 1 & x-a & -a & -a \\ 1 & -a & x-a & -a \\ 1 & -a & -a & x-a \end{vmatrix}$$

$= (x-4a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^3(x-4a)$ なので, 固有値は $0, 4a$ (0 の重複度は 3).

固有値 0 の固有ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(x, y, z, w)$ は, $x + y + z + w = 0$ をみたす．従って $\boldsymbol{v} = {}^t(x, y, z, -x-y-z)$ $(x, y, z$ のいずれかは 0 ではない$)$ がとれる．固有値 $4a$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(x, y, z, w)$ は, 同次連立 1 次方程式 $\begin{bmatrix} -3a & a & a & a \\ a & -3a & a & a \\ a & a & -3a & a \\ a & a & a & -3a \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

を解けばよい．係数行列をはき出し法により階段行列にすると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ になるので,

固有ベクトルとして $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ がとれる．

2 次の場合は, 固有値は, $0, 2a$ でそれぞれ固有ベクトル $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t \neq 0)$, $s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s \neq 0)$ がとれる.

3 次の場合は, 固有値は, $0, 3a$ で, それぞれ固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$ $(x, y$ のいずれかは, 0 でない),

$t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ がとれる. n 次の場合は, 固有値 $0, na$ で, 固有値 0 の固有ベクトルは,

$x_n = -x_1 - x_2 - \cdots x_{n-1}$ で $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ $(x_1, \ldots, x_{n-1}$ の少なくとも 1 つは 0 ではない). 固有値 na の固有ベクトルは, $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ となる.

[**2**] $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の固有多項式は $x^2 - 1$ で, 固有値は, $1, -1$. 各固有空間は, $\boldsymbol{V}(1) = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$, $\boldsymbol{V}(-1) = \langle\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$.

$B = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ の固有多項式は $(x-3)(x-9)^2$ で, 固有値は, $3, 9$.

各固有空間は, $\boldsymbol{V}(3) = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$, $\boldsymbol{V}(9) = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle$.

$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ の固有多項式は $(x-2)(x-3)^2$ で, 固有値は, $2, 3$.

各固有空間は, $\boldsymbol{V}(2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $\boldsymbol{V}(3) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

[**3**] 固有値 0 の固有空間 $\boldsymbol{V}(0)$ の固有ベクトルを, ${}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とする. $x_1+x_2+\cdots+x_n = 0$ を解くと, $n-1$ 次元の部分空間を成す. 基底 $\{\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_n, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1} - \boldsymbol{e}_n\}$ を使って表すと $\boldsymbol{V}(0) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. また固有値 na の固有空間 $\boldsymbol{V}(na) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

[**4**] (1) $B = P^{-1}AP$ については, 行列の積の行列式は, それぞれの行列の行列式の積になることを使えばよいが, 第 9 章で扱うのでここでは解法は省略する.
$C = {}^tA$ のときは, $\varPhi_C(x) = |xE_n - {}^tA| = |{}^t(xE_n - A)| = |xE_n - A| = \varPhi_A(x)$

(2) ある $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ が $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ をみたす必要十分条件は, A を係数行列とする同次連立 1 次方程式と考えると $|A| = 0$, 一方で $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{v}$ と考えると, A が固有値 0 を持つことである. 以上の対偶をとれば, 題意が示される.

(3) $\varPhi_A(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ と因数分解すれば, (2) より, 全ての固有値は 0 ではない. また $\varPhi_A(0) = (-1)^n|A|$ より $|A| = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ である. 一方
$\varPhi_{A^{-1}}(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)$ と同様に因数分解しておくと, 固有多項式の変形
$(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n) = |xE_n - A^{-1}| = |A^{-1}(xA - E_n)| = |A^{-1}|\,|(xA - E_n)|$
$= \frac{1}{|A|}\left|x(A - \left(\frac{1}{x}\right)E_n)\right| = \frac{x^n}{|A|}\left|A - \left(\frac{1}{x}\right)E_n\right| = \frac{(-1)^n x^n}{|A|}\left|\left(\frac{1}{x}\right)E_n - A\right| = \frac{(-1)^n x^n}{|A|}\varPhi_A\left(\frac{1}{x}\right)$
$= \frac{(-1)^n x^n}{\alpha_1\cdots\alpha_n}\left(\frac{1}{x} - \alpha_1\right)\cdots\left(\frac{1}{x} - \alpha_n\right) = \frac{(-1)^n}{\alpha_1\cdots\alpha_n}(1-\alpha_1 x)\cdots(1-\alpha_n x) = (-1)^n\left(\frac{1}{\alpha_1} - x\right)\cdots\left(\frac{1}{\alpha_n} - x\right)$
$= \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\cdots\left(x - \frac{1}{\alpha_n}\right)$ より明らかである.

第 9 章の問題の略解

問 1 例えば, (1) は, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ と 1 つずつの成分の積の順序が交換出来ることに帰着させて示すことができる. 他の性質も各成分ごとの性質に帰着させるという同じ方針で示すことが出来るので各自確かめてみること.

問 2 (1) $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{2}, ||\boldsymbol{b}|| = \sqrt{6}, ||\boldsymbol{c}|| = \sqrt{2}$. (2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 3, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -1, (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -3$.

(3) θ_1 を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の成す角とすると, $\cos\theta_1 = \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}||} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より, $\theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$.

同様に θ_2 を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ の成す角として, 計算をすると $\theta_2 = \dfrac{2\pi}{3}$.

問 3　求める正規直交系を $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$ とすると, $\boldsymbol{v}_1$ を正規化して, $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. 従って, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, (\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_2) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ より, $\boldsymbol{v}_3' = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

従って, $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ となる. 同様にして 2 つめの場合の正規直交化は,

$\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

コラム 問 3 で扱っているのは, 例題 9.2 とまったく同じ 3 つのベクトルの組についての正規直交化であるが, どの順番にシュミットの直交化法を適用するかで, 結果として相異なる正規直交系が得られることに注意しておく. 次章では, 固有空間の基底を求め正規直交化する作業が出てくるが, 固有空間のどの基底の組をとるか, どの順番でシュミットの直交化を行うかでまったく違った見かけの結果（本質的な違いは基底の変換行列のズレでしかない）が得られることになること, 従って同じ課題レポートを解いている友人のレポートと違った答えが出ることがあるので, ここで注意を喚起しておこう.

問 4　行列の転置で, ${}^tO_{a,b} = O_{b,a}$ が成立するので, ${}^tT = \begin{bmatrix}{}^tT_1 & O_{n_1,n_2}\\ O_{n_2,n_1} & {}^tT_2\end{bmatrix}$ と同じサイズのブロック表示ができる. 積 ${}^tTT$ をブロック行列ごとの積を使って計算すると ${}^tTT =$ $\begin{bmatrix}{}^tT_1T_1 + O_{n_1,n_1} & O_{n_1,n_2} + O_{n_1,n_2}\\ O_{n_2,n_1} + O_{n_2,n_1} & {}^tT_2T_2 + O_{n_2,n_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_{n_1} & O_{n_1,n_2}\\ O_{n_2,n_1} & E_{n_2}\end{bmatrix} = E_{n_1+n_2}$ となり, 題意をみたす.

第 9 章 演習問題解答

[**1**] 正規直交系を $\boldsymbol{u}_i$ で表す. (1), (2) は解のベクトルのみ, (3) は例題では扱わなかった 4 次のベクトルの場合なので, 念のため略解を記すことにする.

(1) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は互に直交しあっているので, そのまま正規化して

$\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とできる.

$\boldsymbol{v}_4$ との内積をとって, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_1) = 0, (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_2) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_3) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, なので,

$$\boldsymbol{v}_4' = \boldsymbol{v}_4 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 - (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$= \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. ベクトルの大きさが, $||\boldsymbol{v}_4'|| = 1$ なので, $\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{v}_4' = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

[**2**] (1) 正方行列の積の行列式について成立した性質 $|XY| = |X||Y|$, および転置しても行列式は不変であることをまず思い出しておく. ${}^tTT = E_n$ なので, $1 = |E_n| = |{}^tTT| = |{}^tT||T| = |T|^2$. 従って $|T| = \pm 1$.

(2) $(T\boldsymbol{u}, T\boldsymbol{v}) = {}^t(T\boldsymbol{u})(T\boldsymbol{v}) = ({}^t\boldsymbol{u}{}^tT)(T\boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}({}^tTT)\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

(3) (2) より $||T\boldsymbol{u}|| = \sqrt{(T\boldsymbol{u}, T\boldsymbol{u})} = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})} = ||\boldsymbol{u}||$.

(4) 2 つのベクトルの成す角度は, cos の値で一意的に決まるので, cos の値が不変であることを示せばよい. (2), (3) より, cos の値は, $\dfrac{(T\boldsymbol{u}, T\boldsymbol{v})}{||T\boldsymbol{u}||\ ||T\boldsymbol{v}||} = \dfrac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{||\boldsymbol{u}||\ ||\boldsymbol{v}||}$ となり不変であることがわかる.

[**3**] T_1, T_2 を n 次直交行列とすると, 積 T_1T_2 は,

$${}^t(T_1T_2)(T_1T_2) = ({}^tT_2{}^tT_1)(T_1T_2) = {}^tT_2({}^tT_1T_1)T_2 = {}^tT_2T_2 = E_n$$

となるので, 再び直交行列であることが確かめられる.

第 10 章の問題の略解

問 1 (1) は, $E_n^{-1}AE_n = A$,
(2) は, $B = P^{-1}AP \Longrightarrow A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$.
(3) は, $B = P^{-1}AP, C = Q^{-1}BQ \Longrightarrow C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ)$.

注意) 一般に, 集合 S において, 上での相似のように以下の 3 つの性質をみたす関係 $\sim$ が定義されるとき，関係 $\sim$ は，**同値関係**をみたすという.

(1) 任意の $x \in S$ に対して, $x \sim x$. (反射律)
(2) $x \sim y \quad \Longrightarrow y \sim x$. (対称律)
(3) $x \sim y, y \sim z \Longrightarrow x \sim z$. (推移律)

行列の相似の他の同値関係の例としては, 同じ記号を用いる三角形の集合 S の相似の関係が同値関係の 1 つである. 自然数 n を 1 つ固定して, 整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ に n を**法とした合同**の概念を $x \sim y \Longleftrightarrow$ (x-y) が n で割り切れること で定めると, これも, $\boldsymbol{Z}$ の同値関係の 1 つになる.

問 2

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値は, 1(重複度 2) であり，固有値 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ として $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ がとれる.

$\boldsymbol{v}_1$ と独立なベクトル $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ をとり $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と三角化できる (この上三角行列は，次章でジョルダン標準形とよばれる形のものになっている).

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値は, 2, 4 で, それぞれの固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ をとって, $P = [\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ とすれば, $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ と三角化される (実際には対角化される).

$C = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値は，4, 1 (重複度 2)．固有値 1 の固有空間 $\boldsymbol{V}(1)$ は，$\boldsymbol{V}(1) = \langle\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. 固有値 4 の固有空間 $\boldsymbol{V}(4)$ は, $\boldsymbol{V}(4) = \langle\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$.

基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ に延長して, $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_2]$ とすると, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ と三角化できる. 最後の所で, 三角化の行列を $P_1 = [\boldsymbol{v}_1, -\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_2]$ に代えると,

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ とジョルダン標準形に三角化できる.

問 3 例題 8.1, 8.2, 8.3 の所で, 固有値と固有ベクトルを求めている. A の固有値は, $2, -2$ なので, 定理 10.6 から対角化可能である.

実際に $P = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ をとれば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ と対角化できる.

B の固有多項式は, $(x-1)^2$ で固有値 1 の固有空間 $\boldsymbol{V}(1)$ は, ${}^t(1, 2)$ で生成される 1 次元部分空間. $\dim \boldsymbol{V}(1) = 1 < 2$ (固有値 1 の重複度) なので, 定理 10.4 により, 対角化不可能である.

C の固有多項式 $\Phi_C(x) = (x-1)^2(x-4)$ で, 固有空間はそれぞれ

固有値 1 の固有空間は, $\boldsymbol{V}(1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ (2 次元),

固有値 4 の固有空間は, $\boldsymbol{V}(4) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ (1 次元). 従って定理 10.4 により対角化可能であり, 実際 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ をとれば, $P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ と対角化できる.

F の固有多項式 $\Phi_F(x) = (x-1)^2(x-6)$ である. 固有値 1 の固有空間は, $\boldsymbol{V}(1) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ (2 次元), 固有値 6 の固有空間は, $\boldsymbol{V}(6) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$ (1 次元). 従って

$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ により対角化可能で, $P^{-1}FP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ と対角化できる.

G の固有多項式は, $(x-1)^2(x-6)$ で固有値 1 の固有空間 $\boldsymbol{V}(1)$ は, 1 次元部分空間.
$\dim \boldsymbol{V}(1) = 1 < 2$ (固有値 1 の重複度) なので, 定理 10.4 により, 対角化不可能である.

問 4 A の固有多項式は,

$$\Phi_A(x)=\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ -1 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2-x \\ -1 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & -1 & x-2 \end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix}=(x-2)(x^2-4x+2)$$

$$=(x-2)(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2}))$$

それぞれの固有空間は, $A(2)=A-2E_3=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A(2+\sqrt{2})=A-(2+\sqrt{2})E_3$

$=\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $A(2-\sqrt{2})=A-(2-\sqrt{2})E_3=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ なので

$\boldsymbol{V}(2)=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\boldsymbol{V}(2+\sqrt{2})=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\boldsymbol{V}(2-\sqrt{2})=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

各固有ベクトルを正規化すれば, 直交行列 $T=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ が得られ,

${}^tTAT=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}$ と対角化できる.

$\Phi_B(x)=(x-2)^2(x-7)$ で, $\boldsymbol{V}(2)=\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\boldsymbol{V}(7)=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

各固有空間の基底をシュミットの正規直交化法で正規直交系にすれば, 直交行列

$T=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ が得られ, ${}^tTBT=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ と対角化できる.

$\Phi_C(x)=(x-12)^2(x-6)$ で, $\boldsymbol{V}(12)=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\boldsymbol{V}(6)=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

各固有空間の基底をシュミットの正規直交化法で正規直交系にすれば, 直交行列

$T = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]$ (ただし, $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$)

が得られ, ${}^tTCT = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ と対角化できる.

第 10 章 演習問題解答

[**1**] A の固有値は, -2 と -3. それぞれの固有ベクトルを並べて $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ とおくと,

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ と対角化可能.

B の固有多項式は, $\Phi_B(x) = (x-2)^2$. 固有値 2 の固有空間 $\boldsymbol{V}(2)$ は, $\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

$\dim \boldsymbol{V}(2) = 1 < 2$ (固有値 2 の重複度) となり, 定理 10.4 より対角化不可能.

C の固有多項式は, $\Phi_C(x) = (x-2)^2(x-6)$. 固有値 2 の固有空間 $\boldsymbol{V}(2)$ は, $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

$\dim \boldsymbol{V}(2) = 1 < 2$ (固有値 2 の重複度) となり, 対角化不可能.

D の固有多項式は, $\Phi_D(x) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$ (i は虚数単位). 全ての固有値が相異なるので, 定理 10.6 より対角化可能である. 各固有空間は,

$$\boldsymbol{v}(1) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,\ \boldsymbol{v}(-1) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle,\ \boldsymbol{v}(i) = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,\ \boldsymbol{v}(-i) = \langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると, $P^{-1}DP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$.

[2] $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値は, 3 と 1. それぞれの固有ベクトルを正規化して並べてできる直

交行列を $T=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ とおくと, ${}^tTAT=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$ の固有多項式は, $\varPhi_A(x)=(x-1)(x-4)(x-7)$. 各固有値の固有ベクトルを正規化して並べてできる直交行列を T とすると, $T=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$ がとれ,

${}^tTAT=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$.

$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ の固有多項式は, $\varPhi_A(x)=(x-1)^2(x+1)$. シュミットの正規直交化法により, 固有値 1 の固有空間 $\boldsymbol{V}(1)$ の正規直交基底 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ がとれ, $\boldsymbol{V}(-1)$ の正規直交基底として $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ がとれるので, 直交行列 T として $T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ がとれ,

${}^tTAT=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ と対角化できる.

$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ の固有多項式は, $\varPhi_A(x)=(x-1)^2(x+1)^2$. シュミットの正規直交化法により, 固有値 1 の固有空間 $\boldsymbol{V}(1)$ の正規直交基底 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$ がとれ,

$\boldsymbol{V}(-1)$ の正規直交基底として $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれるので, 直交行列 T として

$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ がとれ, ${}^tTAT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ と対角化できる.

$A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ の固有値は, 0 と $2a$. それぞれの固有ベクトルを正規化して並べてできる直交行列は $T = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ となり, ${}^tTAT = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$.

$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$ の固有多項式は, $\Phi_A(x) = x^2(x-3a)$. シュミットの正規直交化法により, 固有値 0 の固有空間 $\boldsymbol{V}(0)$ の正規直交基底 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ がとれ, $\boldsymbol{V}(3a)$ の正規直交基底として $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ がとれるので, 直交行列 T として $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ がとれ,

${}^tTAT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a \end{bmatrix}$ と対角化できる.

$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix}$ の固有多項式は, $x^3(x-4a)$. 固有値 0 の固有空間 $\boldsymbol{V}(0)$ の基底として

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれるので, シュミットの正規直交化法によ

り, 正規直交系 $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ がとれる. 固有値 $4a$ の 1 次元固有空間の正規直交基底 $\boldsymbol{u}_4$ は, $\boldsymbol{u}_4 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 直交行列 $T = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4]$ をとれば, ${}^tTAT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a \end{bmatrix}$ と対角化できる.

n 次行列 $A = \begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$ のとき, 固有多項式 $\Phi_A(x) = x^{n-1}(x - na)$. $n = 3$ のときと同様に, 固有空間 $\boldsymbol{V}(0)$ の正規直交基底として $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}$ がとれる. ただし k 番目の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_k = {}^t(1, \ldots, 1, -k, 0, \ldots, 0)$ は, 1 番目から k 番目までが, 1, $k+1$ 番目が $-k$, $k+1$ 番目以降は, 0 をみたす. $\boldsymbol{V}(na)$ の正規直交基底 $\boldsymbol{u}_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}{}^t(1, 1, \ldots, 1)$ をとってできる n 次の直交行列 $T = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n]$ により, ${}^tTAT = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & na \end{bmatrix}$ と対角化できる.

n 次行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ の固有多項式 $\Phi(x)$ は, $n = 2m$ (偶数) のときは, $(x-1)^m(x+1)^m$. $n = 2m+1$ (奇数) のときは, $(x-1)^{m+1}(x+1)^m$.

以下 n が偶数のときと, 奇数のときに分ける.

1) まず $n = 2m$ のときは, 固有値 1 の固有空間の正規直交基底として, $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1, 0, \ldots, 0, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t(0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0), \ldots, \boldsymbol{u}_m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t(0, \ldots, 0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$. 固有値 -1 の固有空間の

正規直交基底として, $\boldsymbol{u}_{m+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t(-1, 0, \ldots, 0, 1)$, $\boldsymbol{u}_{m+2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t(0, -1, 0, \ldots, 0, 1, 0), \ldots, \boldsymbol{u}_{2m}$ $= \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t(0, \ldots, 0, -1, 1, 0, \ldots, 0)$ がとれる．左下から右上の対角線上にのみ 1 が並び, 他の成分は 0 であるような m 次行列 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \iddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ を F_m と表すことにすると, 直交行列 T は,

$T = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{2m}] = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} E_m & -F_m \\ F_m & E_m \end{bmatrix}$ と表せて, ${}^tTAT = \begin{bmatrix} E_m & O_m \\ O_m & -E_m \end{bmatrix}$ と対角化できる.

2) $n = 2m + 1$ のときは, 固有値 1 の固有空間の正規直交基底として,
$\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1, 0, \ldots, 0, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t(0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0), \ldots, \boldsymbol{u}_m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ と $\boldsymbol{u}_{m+1} = {}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ がとれる．固有値 -1 の固有空間の正規直交基底としては, $\boldsymbol{u}_{m+2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t(-1, 0, \ldots, 0, 1), \ldots, \boldsymbol{u}_{2m+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t(0, \ldots, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ がとれる.

直交行列 T は, $T = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_{m+1}, \boldsymbol{u}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{2m+1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}E_m & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}F_m \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}F_m & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}E_m \end{bmatrix}$

と表せて, ${}^tTAT = \begin{bmatrix} E_{m+1} & O_{m+1,m} \\ O_{m,m+1} & -E_m \end{bmatrix}$ と対角化できる.

第 11 章の問題の略解

問 1

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ $\lambda = 9, -1, \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x}(t) = C_1 e^{9t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = 1, -1, 3,$ $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda = 5, -10,$ $\boldsymbol{p}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

問 2

(1)　行列 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}$ に対する固有多項式は　$|A-\lambda E_2|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\1&3-\lambda\end{vmatrix}$ $=(1-\lambda)(3-\lambda)+1=3-\lambda-3\lambda+\lambda^2+1=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$. よって, 固有値 2 の固有空間

$W_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad x+y=0\right\}$ に含まれる固有ベクトル

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$=x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ の $x=1$ のときを $\boldsymbol{p}_1$ とおく.　$(A-2E)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1$ より $\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ を解けば　$x+y=-1$. よって $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

したがって, 不足したベクトル $\boldsymbol{p}_2$ は左の式で $x=0$ とおいて $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{p}_2$ を得るので,

解は

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{2t}\left\{tC_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

(2)　$A=\begin{pmatrix}2&-3&-7\\1&6&3\\1&1&7\end{pmatrix}$ に対する固有多項式を $\Phi_A(\lambda)$ とおけば, $\Phi_A(\lambda)=(\lambda-5)^3$.

$$A\boldsymbol{p}_1=\lambda\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{p}_2=\lambda\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1\qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

この不足ベクトル $\boldsymbol{p}_2$ は**解答**例と合わなくとも, 先のベクトル $\boldsymbol{p}_1$ の定数倍を $\boldsymbol{p}_2$ と合成したものでもよい. たとえば, $\boldsymbol{p}_2'=1\cdot\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$$A\boldsymbol{p}_3 = \lambda\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

この不足ベクトル $\boldsymbol{p}_3$ も, 先のベクトル $\boldsymbol{p}_2'$ の定数倍を $\boldsymbol{p}_3$ と合成したものでもよい. たとえば,

$\boldsymbol{p}_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$. よって解 $\boldsymbol{x}(t)$ は,

$$e^{5t}\left[\frac{t^2}{2!}C_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\left\{C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} + C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}\right].$$

係数行列 A のジョルダン標準形 $P^{-1}AP$ を確かめるのに必要な変換行列 $P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ または $P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2', \boldsymbol{p}_3')$ の逆行列 P^{-1} を実際に求める場合は諸君の稍(やや)つらい手計算の後に, 付章 2 に載せた C++ プログラム mtx3rank123.cc を用いるのも一案である.

(3) $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) - 1 + (4-\lambda) + (5-\lambda) = (5-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) + 2(4-\lambda) = (4-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) + 2 = (4-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = -(4-\lambda)^2(\lambda - 3).$

行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 4 に対する固有空間

$W_4 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ は $z = 0,\ x+y = 0$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 不足ベクトル $\boldsymbol{p}_2$ は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて

$z = -1, \quad x + y + z = 1, \quad -x - y - 2z = 0, \quad x + y = 2$ すなわち,

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2-x \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を得る.　固有値 3 に対する固有空間 $W_3 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

を解いて

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ から $x = 0, \quad y + z = 0.$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} =$

$y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を得る. よって解は,

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{4t} \left\{ tC_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

第 12 章の問題の略解

問題 1

(1) $T_1 = 1$. $T_2 = 2$. このとき T_3 を次の二通りの敷き詰め方 [パタン] に分けて考えよ. 始めに最後の一畳を縦に敷いた残りの一枚目と二枚目の二畳の異なる敷き詰め方は二通り T_2 に等しい. 次のこのパタンに含まれない最後の二畳を横に敷いた場合, 残り一枚の敷き詰め方は一通り T_1 に等しい. すなわち, $T_2 + T_1 \leqq T_3$. 他方, 畳三枚の任意の敷き詰め方は前者または後者に考えたパタンどれかに一致するので, $T_3 \leqq T_2 + T_1$ となり, 挟み撃ちより $T_2 + T_1 = T_3$. この考え方は $n+2$ 畳の廊下にもあてはまるので, $T_{n+1} + T_n = T_{n+2}$ がなりたつ.

(2) (1) より $T_1 = F_2, T_2 = F_3, T_3 = F_4, \cdots, T_{30} = F_{31}$. **演習 12.3** にあるフィボナッチ数, リュカ数の '加法定理', '倍角', '三倍角公式' を使う. $F_{31} = (L_{30} + F_{30})/2$;

$F_{30} = L_{15}F_{15},\ L_{30} = (L_{15}^2 + 5F_{15}^2)/2$;

$F_{15} = (L_5F_{10} + L_{10}F_5)/2,\ L_{15} = (L_5L_{10} + 5F_5F_{10})/2$;

$F_{10} = L_5F_5,\ L_{10} = (L_5^2 + 5F_5^2)/2$

以上の式にふたつの値 $F_5 = 5,\ L_5 = 11$ を代入すればよい.

実際, $F_{10} = 55, L_{10} = 123$;

$F_{15} = (11 \cdot 55 + 123 \cdot 5)/2 = 5(11^2 + 123)/2 = 5 \cdot 122 = 610$,

$L_{15} = (11 \cdot 123 + 5 \cdot 5 \cdot 55)/2 = 11(123 + 5^3)/2 = 11 \cdot 124 = 1364$. ゆえに

$F_{30} = 1364 \cdot 610,\ L_{30} = (1364^2 + 5 \cdot 610^2)/2$

[ここで, 一息ついて, 30 番目のフィボナッチ, リュカ数の値は計算せずに**式の姿**から, それぞれの分子は 4 で割り切れることを観(み)るに止め, 最後まで電卓は使うまい.] これより F_{31}

$= \left\{(1364^2 + 5 \cdot 610^2)/2 + 1364 \cdot 610\right\}/2$

$= (682^2 + 5 \cdot 305^2) + 682 \cdot 2 \cdot 305$

$= (682 + 305)^2 + 4 \cdot 305^2$

$= (987)^2 + 4 \cdot 305^2 = (1000 - 13)^2 + 4 \cdot (300 + 5)^2$

$= 1000000 - 26000 + 169 + 4(90000 + 3000 + 25)$
$= 1000000 - 26000 + 169 + 360000 + 12000 + 100$
$= 1000000 - 14000 + 360000 + 269 = 1000000 + 346000 + 269$
$= 1346269.$　よって, 畳 30 枚の敷き詰め方の総数は百万パタンを超えて 1346269 通り.

付章 2 にある C++ プログラム (s70711fibo2.cc) をコメント文 //⋯ ⋯ ⋯ 数行の追加修正を除けば, 次の三行だけ手直しして WinXP[なら Cygwin 上] または Linux 上で F_{31} の値を確かめてみよ. 手直しを終えたら, プログラム名を e.g., tatami90305.cc として, C++ コンパイルを経て, exe ファイルを実行してみよう.

```
  c++ tatami90305.cc -o tatami90305
```

```
//cout<<"奇素数 pの値を入力せよ．\n";
cout<<"フィボナッチ数 F_pの番号 pの値を入力せよ．\n";
//k=0;
k=2;
// この手直しは初期値 b，すなわち第 2項 F_2の値を 1と入力する場合である．
//a=2*(p+1);
a=p+1;
// t = (s + t)%p;
t = s + t;
//この手直しでは，pの値に 31を入力しておれば，フィボナッチ数列の
// F_1から F_{32}までを出力する．すなわち，次のコメント文をいれる．
//cout<<";法 p="<<p<<"の周期の長さk= "<< k <<"\n\n";
cout<<";項の番号 p="<<p<<"のひとつ先までの出力項数の長さk= "<<"k+1<<"\n\n";
//cout<< "周期の長さk="<< k <<"\n";
cout<<"ひとつ先までの出力項数の長さk= "<<k+1<<"\n";
```

問題 2

$f_0 = 0 = F_0$, $f_1 = 1 = F_1$, $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$ かつ $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ から数列 $\{f_n\} = \{F_n\}$.

演習 12.1

(1) $\forall\alpha = a + b\sqrt{5}, \boldsymbol{b} = c + d\sqrt{5} \neq 0 \in \boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ に対し, 和差 $\alpha + \boldsymbol{b} = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{5}$, 積 $\alpha\boldsymbol{b} = (ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}$ 及び商 $\dfrac{\alpha}{\boldsymbol{b}}$ は分母を有理化して $\dfrac{\alpha\overline{\beta}}{\beta\overline{\beta}} = \dfrac{(a + b\sqrt{5})(c - d\sqrt{5})}{c^2 - 5d^2}$ $= \dfrac{ac - 5bd}{c^2 - 5d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 - 5d^2}\sqrt{5}$ よりいずれも, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ の数となる.

(2)　(1) より, $\overline{\alpha + \beta} = (a + c) - (b + d)\sqrt{5} = (a - b\sqrt{5}) + (c - d\sqrt{5}) = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$. $\overline{\alpha \cdot \beta} = (ac + 5bd) - (ad + bc)\sqrt{5} = (a - b\sqrt{5})(c - d\sqrt{5}) = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$.

演習 12.2

(1) の解は **定理 12.1** の検証例で示した. (2) の解も本文 (101–102 頁) で示した. いずれも, 番号 n についての数学的帰納法を用いている.

演習 12.3

演習 12.2 の (1), (2) より, $L_n = \varepsilon^n + \overline{\varepsilon}^n$, $\sqrt{5}F_n = \varepsilon^n - \overline{\varepsilon}^n$. したがって,

$L_n + F_n\sqrt{5} = 2\varepsilon^n$, $L_n - F_n\sqrt{5} = 2\overline{\varepsilon}^n$, すなわち, $\dfrac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2} = \varepsilon^n$, $\dfrac{L_n - F_n\sqrt{5}}{2} = \overline{\varepsilon}^n$.

(2) 等式 $\varepsilon^{n+1} = (\varepsilon^n)^n \cdot \varepsilon$ 及び (1) より,

$\dfrac{L_{n+1} + \sqrt{5}F_{n+1}}{2} = \dfrac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{L_1 + F_1\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\frac{L_n+5F_n}{2} + \frac{L_n+F_n}{2}\sqrt{5}}{2}$. よって, 最初と最後の 2 つの式の分子の 1 の係数と $\sqrt{5}$ の係数とを其々比べればよい.

(3) 等式 $\varepsilon^{2n} = (\varepsilon^n)^2$ を用いて, $\dfrac{L_{2n} + F_{2n}\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\frac{L_n^2+5F_n^2}{2} + L_nF_n\sqrt{5}}{2}$ から従う.

(4) 等式 $\varepsilon^{3n} = \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{2n}$ 及び (1) の ε^n の指数 n が $3n,\ n,\ 2n$ の場合にあてはめて,

$\dfrac{L_{3n} + F_{3n}\sqrt{5}}{2} = \dfrac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{L_{2n} + F_{2n}\sqrt{5}}{2}$.

したがって, $L_{3n} = \dfrac{L_nL_{2n} + 5F_nF_{2n}}{2}$, $F_{3n} = \dfrac{L_nF_{2n} + F_nL_{2n}}{2}$.

演習 12.4 (1), (2), (3) のいずれも, 最大公約数は 1. なお, (3) は $b = 10006721$ が素数であることを使わずに, ユークリッドの互除法で行え. ここで, $b = 8765432 = 2^3 \cdot 1095679$ 及び $a = 10006721$ は奇数であるから, $1095679 = b_1$ とおくとき, $\gcd(a, b) = \gcd(a, b_1)$ を用いて計算を節約せよ. 残りの計算は a を b_1 で割った余り $r_1 = 145610$ に対し, $\gcd\left(b_1, \dfrac{145610}{10}\right) = \gcd(14561, r_2)$, 及び $\gcd(14561, 11)$, $\gcd(14561, 13)$, の計 4 種類の互除法で済む. ここに, r_2 は b_1 を $\dfrac{r_1}{10}$ で割った余り $143 = 11 \cdot 13$.

問題 $\overset{\text{Euclidean Algorithm}}{\textbf{EA}}$

解は**ラメの定理**にある.

演習 12.5

(1) $\gcd(21, 13)$ を求めてみると

$$
\begin{aligned}
21 &= 1 \cdot 13 + 8 \\
13 &= 1 \cdot 8 + 5 \\
8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\
5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\
3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

より, $\gcd(23, 13) = 1$ となり, 余りが 0 になるまでの割り算の回数は 6 回必要である. この互除法の例では各ステップ $r_{j-1} = q_{j+1} \cdot r_j + r_{j+1},\quad 0 < r_{j+1} < r_j$ の余り r_{j+1} は除数 r_j の半分より大きい. しかし次のステップの余り r_{j+2} はひとつ手前の除数 r_j の半分より小さい.　一般に $r_{j-1} = q_{j+1} \cdot r_j + r_{j+1},\quad \dfrac{r_j}{2} < r_{j+1} < r_j$ のとき, 次の割り算は $r_j = 1 \cdot r_{j+1} + r_{j+2} = r_j$,

$r_{j+2} = r_j - r_{j+1} < r_j - \dfrac{r_j}{2} = \dfrac{r_j}{2}$ となり, 余り r_{j+2} はひとつ手前の除数 r_j の半分より小さい. もしも $r_{j+1} < \dfrac{r_j}{2}$ なら, $r_{j+2} < r_{j+1}$ より $r_{j+2} < \dfrac{r_j}{2}$ となる.

(2) 互除法

$$\begin{array}{rcrr} a &=& q_1 \cdot b + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b &=& q_2 \cdot r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &=& q_3 \cdot r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ \cdots & \cdot & \cdots, & \cdots \\ r_{n-2} &=& q_n \cdot r_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &=& q_{n+1} \cdot r_n + r_{n+1}, & 0 = r_{n+1} \end{array}$$

において, 最後のひとつ手前の番号 n が奇数 $2m+1$ なら

$$0 < r_{2m+1} < \frac{1}{2} r_{2m-1} < \frac{1}{2^2} r_{2m-3} < \cdots < \frac{1}{2^{m-1}} r_{2m-(2m-3)} < \frac{1}{2^m} r_{2m-(2m-1)} = \frac{1}{2^m} b$$

すなわち, $2^m < b$ 両辺の, 2 を底とする対数を採れば $m < \log_2 b$. ここで, ゆえに, gcd を求めるまでの割り算の回数 $n+1 = 2m+2$ は 高々 $2(m+1) \leqq 2([\log_2 b]+1) = 2s$. ここに s は b の 2 進数表示の桁数である; $(b_s b_{s-1} \cdots b_1 b_0)_2$, $b_s = 1$, $s-1 \geqq j \geqq 0$ に対し $b_j = 0$ または $= 1$. 一例として $b = 13$ の 2 進数表示は $13 = 2^3 + 2^2 + 2^0 = (1101)_2$ となり, 2 進 4 桁である. $\log_2 b$ の整数部分 $[\log_2 b]$ は 3. 最後のひとつ手前の番号 n が偶数 $2m$ なら $0 < r_{2m} < \dfrac{1}{2} r_{2m-2} < \dfrac{1}{2^2} r_{2m-4} < \cdots < \dfrac{1}{2^{m-2}} r_{2m-(2m-4)} < \dfrac{1}{2^{m-1}} r_{2m-(2m-2)} < \dfrac{1}{2^{m-1}} b$, すなわち, $m-1 < \log_2 b$, $m-1 \leqq [\log_2 b]$, ゆえに, 割り算の回数 $n+1 = 2m+1$ は 高々 $2m+1 \leqq 2([\log_2 b]+1) = 2s$.

(3) 最大公約数を求めるまでに必要なユークリッド互除法の回数評価の比 $\dfrac{5t}{2s}$ は $10^{t-1} \leqq b < 10^t$ 及び $2^{s-1} \leqq b < 2^s$ より, $t-1 \leqq \log_{10} b < t$ 及び $s-1 \leqq \log_2 b < s$ となるから, 比は $\dfrac{5\log_{10} b}{2(\log_2 b+1)} < \dfrac{5t}{2s} < \frac{5(\log_{10} b+1)}{2\log_2 b}$ の間にある. 底の変換公式を用いて, $\dfrac{5 \cdot \frac{\log_2 b}{\log_2 10}}{2\,(\log_2 b)} < \dfrac{5 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{5}{6}$ がなりたつので, もしも, $b > 2^{30}$ なら, $\log_2 b > 30$ より, 右辺 $< \dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{2 \cdot 30} = \dfrac{11}{12}$. すなわち, **ラメの定理**の方が gcd を求めるのに必要な割り算の回数の上限に対し, **演習 12.5** (2) より優れた評価を与えている.

演習 12.6

$k_{0,1}(5) = 20 = 4 \cdot 5$, $k_{2,1}(5) = 4 = 5-1$; $k_{0,1}(7) = 16 = 2 \cdot (7+1)$, $k_{2,1}(7) = 16 = 2(7+1)$; $k_{0,1}(11) = 10 = 11-1$, $k_{2,1}(11) = 10 = 11-1$.

演習 12.7

(1) $a \mp b = mh$, $c \mp d = mk$ より $\quad (a+c) \mp (b+d) = m(h \pm k)$.

(2) $a - b = mh$ より $ca - cb = c(a-b) = c(mh) = m(ch)$.

(3) $\gcd(c,m) = d$ かつ $ca \equiv cb \pmod{m}$ より, $c = dc_1, m = dm_1$ かつ $ca - cb = mh$. ゆえに $c_1 a - c_1 b = c_1(a-b) = m_1 h$. $\gcd(c_1, m_1) = 1$ より, $a - b = m_1 k$, すなわち, $a - b = \frac{m}{d} k$. とく

に, 法 m と c とが互いに素なら $a-b=\frac{m}{1}k=mk$.

演習 A1.1

解は本文にある.

演習 A1.2

i) $\forall x\in F^\times$ に対し, 単位元 $1\in F^\times$ を採れば, $1^{-1}x1=x$ より, $x\sim x$.

ii) もしも, $x,y\in F^\times$ に対し, $x\sim y$ ならば, $\exists z\in F^\times; y=z^{-1}xz$. よって, $(z^{-1})^{-1}yz^{-1}=x$, $(z^{-1})^{-1}=z\in F^\times$ より, $y\sim x$.

iii) もしも, $x\sim y, y\sim z$ なら $\exists u,v\in F^\times; y=u^{-1}xu,\ z=v^{-1}yv$. よって, $z=v^{-1}(u^{-1}xu)v=(uv)^{-1}x(uv)$. ここに, $a,b\in F^\times$ に対し, $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ を用いた. よって, $z\sim x$.

演習 A1.3

(1) の解は本文にある.

(2) (1) の解より, 1 の n 乗根 $\exp(2\pi ia/n), a \pmod n$ は適当な $1\leqq d|n$ に対し, $\boldsymbol{Q}$ 上 d 次既約多項式 $\Phi_d(X)$ の根であること及び $\Phi_d(X)|X^d-1|X^n-1,\ X^n-1=(X^d)^{n/d}-1$ より, $X^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(X)$ がなりたつ. この両辺の X に適当な整数 $\neq 1$ を代入したものの log にメビウス(Möbius) の反転公式を用いれば,

$$\begin{aligned}\log\Phi_n(X) &= \sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})\log(X^d-1)\\ &= \sum_{d|n}\log(X^d-1)^{\mu(\frac{n}{d})}\\ &= \prod_{d|n}\log(X^d-1)^{\mu(\frac{n}{d})}.\end{aligned}$$

ゆえに, $\Phi_n(X)=\prod_{d|n}(X^d-1)^{\mu(\frac{n}{d})}$. この両辺は $\varphi(n)$ 個より多い整数を代入してもなりたつので, 恒等的になりたつと考えてよい. とくに, $X=0$ のときは, **演習 A1.1** を用いて,

$$\Phi_n(0)=\prod_{d|n}(-1)^{\mu(\frac{n}{d})}=(-1)^{\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})}=\left\{\begin{array}{cc}-1 & n=1\\ 1 & n>1\end{array}\right\}.$$

(3) 右辺は分数式の姿をした多項式 $\Phi_n(X)=\prod_{d|n}(X^d-1)^{\mu(\frac{n}{d})}$ の両辺を X で微分すれば, $t|n$ に対し,

$\Phi'_n(X)=\sum_{t|n}\left(\frac{d(X^t-1)^{\mu(\frac{n}{t})}}{dX}\cdot\prod_{s|n,s\neq t}(X^s-1)^{\mu(\frac{n}{s})}\right)$. n が平方因数をふくまず, r 個の素数の積の場合は

r が偶数なら, $\Phi'_n(0)=\left.\frac{d(X-1)}{dX}\right|_{X=0}\cdot\prod_{s|n,s\neq t}(0^s-1)^{\mu(\frac{n}{s})}=1\cdot(-1)^{-\mu(n)}(-1)^{\sum_{s|n}\mu(\frac{n}{s})}$

$=1(-1)^{-1}(-1)^0=-1$.

r が奇数なら, $\Phi'_n(0) = \left.\dfrac{d(X-1)^{-1}}{dX}\right|_{X=0} \cdot \displaystyle\prod_{s|n, s\neq t} (0^s - 1)^{\mu(\frac{n}{s})} = (-1)\cdot(-1)^{-\mu(n)}(-1)^{\sum_{s|n}\mu(\frac{n}{s})}$

$= (-1)(-1)^{-(-1)}(-1)^0 = 1.$

(3) の**別解**. 円周 n 等分方程式 $\Phi_n(X) = 0$ の $\varphi(n)$ 個の解の和を $f(n)$ とおく. 恒等式 $X^n - 1 = \prod_{d|n}\Phi_d(X)$ の両辺の解の和をくらべて, $1 = f(1)$, $0 = f(1) + \cdots + f(d) + \cdots + f(n)$. よって, $\displaystyle\sum_{d|n} f(d)$ を $F(n)$ とおけば, $1 = F(1), 0 = F(n), n > 1$. したがって, メビウスの反転公式を用いれば, $f(n) = \displaystyle\sum_{d|n}\mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right) = \mu(n)F(1) = \mu(n)$. 他方, $\Phi_n(X)$ の一次の項の係数は解と係数との関係より, $-f(n)$ に等しい. ゆえに, $-f(n) = -\mu(n)$.

(4) **演習 A1.3** (1) より, $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{d|n}\Phi_d(X)$ がなりたつ. 一方, $d|n$ に対し, $X^d - 1 = \displaystyle\prod_{t|d}\Phi_t(X)$ は積 $\prod_{s|n}\Phi_s(X)$ の一部であり, $d < n$ より, $\Phi_n(X)$ は $X^d - 1$ の因子にふくまれない. ゆえに, 多項式 $\dfrac{X^n-1}{X^d-1} = \displaystyle\prod_{s|n, s\neq n}\Phi_s(X)$ は $\Phi_n(X)$ で割り切れる.

例. $\Phi_1(X) = X - 1$; $\Phi_2(X) = \dfrac{X^2-1}{X-1} = X + 1$; $\Phi_3(X) = \dfrac{X^3-1}{X-1} = X^2 + X + 1$;

$\Phi_4(X) = \dfrac{X^4-1}{X^2-1} = X^2 + 1$; $\Phi_5(X) = \dfrac{X^5-1}{X-1} = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$;

$\Phi_6(X) = \dfrac{(X^6-1)(X-1)}{(X^2-1)(X^3-1)} = X^2 - X + 1.$

付章 1 の問題の略解

問 1 $\alpha = a + b\boldsymbol{i}, \beta = c + d\boldsymbol{i}, \gamma = e + f\boldsymbol{i}$ とすると,

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\gamma) &= (a + b\boldsymbol{i}b)((c+e) + (d+f)\boldsymbol{i})\ a(c+e) - b(d+f) + (a(d+f) + b(c+e))\boldsymbol{i} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\boldsymbol{i} + (ae - bf) + (af + be)\boldsymbol{i} = \alpha\beta + \alpha\gamma.\end{aligned}$$

問 2 $\boldsymbol{C} = \{a + b\boldsymbol{i} \mid a, b \in \boldsymbol{R}\} = \langle 1, \boldsymbol{i}\rangle$ なので $1, \boldsymbol{i}$ で $\boldsymbol{R}$ 上生成される. また $a + \boldsymbol{i} = 0 \iff a = b = 0$ なので, $1, \boldsymbol{i}$ は $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立. 以上により $1, \boldsymbol{i}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の基底になる.

注意) $\boldsymbol{C}$ は, $\boldsymbol{C}$ を係数として考えると 1 次元ベクトル空間であるが, $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間と考えると今確かめたように 2 次元ベクトル空間である. このようにどの係数の範囲 (すなわちどの**体**上のベクトル空間) で考えるかが重要になる. $\boldsymbol{R}$ の元 $1, \sqrt{2}$ は, 実数上では, もちろん 1 次従属であるが, $\boldsymbol{Q}$ 上では (すなわち有理数係数では)1 次独立.
$a + b\sqrt{2} = 0 \iff a = b$ であることは, $\sqrt{2}$ が無理数であることに他ならない.[1]

問 3 演習 12.1 の解答例を真似(まね)よ.

問 4 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ に α を代入して, 両辺の複素共役をとると, 実

[1]紀元前の古代ギリシャで, ユークリッド (Euclid) がその著書「原論」でその厳密な証明与えている.

数係数なので $f(\overline{\alpha}) = a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = 0$ となり $\overline{\alpha}$ も解であることがわかる.